Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Résumé des séances

05/01. La partie 1 du polycopié et la feuille d'exercices 1 sont données.

Les premières pages du polycopié, jusqu'à la définition de polynôme, sont abordées et illustrées par des exemples. Les symboles de la théorie des ensembles sont donnés ainsi que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Les notions de fonction, domaine de définition, restriction, prolongement, fonction numérique de la variable réelle, graphe, racine carrée, polynômes (fonction polynomiales) sont expliquées. Le nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels et réels sont cités sans rentrer dans les détails.

L'identité

$$1+x+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

est établie.

Il est signalé sans explication qu'il existe une relation entre cette somme des termes d'une suite géométrique et la propagation d'une épidémie qu'on mesure avec le désormais célèbre $R0$, le taux de reproduction, qu'on souhaite inférieur à 1.

Les questions (a) à (e) de l'exercice 1 sont résolues. C'est l'occasion de rappeler la relation entre tangente, sinus et cosinus et de travailler un peu avec le cercle trigonométrique.

Il est demandé de finir l'exercice 1 et de réfléchir à la résolution des exercices 2 et 3 de la feuille d'exercices 1.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

12/01. Une étude introductive aux polynômes (réels) et au fractions rationnelles est faite. Il est en particulier expliqué comment faire une division euclidienne de polynômes. La notion de parité est abordée.

Les questions (f) à (l) de l'exercice 1 sont résolues. C'est l'occasion de montrer comment déduire de l'égalité $e^{x+y} = e^x \times e^y$ que $e^0 = 1$ et que $e^x > 0$ si $x \in \mathbf{R}$ (pourvu qu'on sache que l'exponentielle n'est pas la fonction nulle).

Les exercices 2 et 3 sont résolus. Ce dernier est consacré à l'étude d'une homographie et à son graphe, une hyperbole.

Il est demandé de réfléchir à la résolution des exercices 5, 11, 12 et 13.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

19/01. Le cours porte sur les fractions rationnelles, la parité, la composition de fonctions et l'injectivité. La question de l'injectivité éventuelle de certaines fonctions comme λ, $ax+b$, $\frac{1}{x}$, x^2 et x^3 est résolue.

Les exercices 5 et 11 sont résolus (le 11 partiellement). Une solution de l'exercice 12 est mise en ligne à l'issue de la séance avec un point historique et théorique.

Il est demandé de reprendre les solutions proposées pendant cette séance et de réfléchir à la résolution de l'exercice 13 (calculer $h(y) = g(y-2)$ peut aider).

En CMP1 comme en CMP3 le contrôle sera composé de variantes simplifiées d'exercices ou d'exemples qui ont pu être traités en cours (voir les notes écrites sur la tablette). Chaque fois le contrôle sera accessible mais permettra tout de même de différencier les étudiants. Il comptera plusieurs petites questions plutôt que de rares questions qui nécessiteraient chacune un développement long.

Il ne faut pas hésiter à poser des questions pendant les cours de CMP1 et CMP3.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

26/01. Le cours porte sur les notions de surjections et bijections. Des exemples comme la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\frac{1}{1+x^2}$ sont étudiés.

L'exercice 11 est terminé. Lors de la séance de questions les solutions proposées pour l'exercice 12, en ligne la semaine dernière, sont examinées.

Pour la semaine prochaine, on peut réfléchir aux exercices 14, 15 et 16.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

02/02. Le cours porte sur la notion de réciproque d'une fonction numérique de la variable réelle. La définition est donnée, des exemples et contre exemples également. Il est établi l'unicité de la réciproque et il est montré qu'il équivalent d'être une bijection et de posséder une réciproque.s notions de surjections et bijections. Des exemples comme la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\frac{1}{1+x^2}$ sont étudiés.

L'exercice 14 est est traité sauf l'inéquation (f). La résolution de cette dernière équation est cependant ajoutée aux notes mises en ligne.

Il n'y aura pas d'enseignement de CMP1 et CMP3 les 9 et 10 février. Les prochaines séances auront lieu les 16 et 17 février.

Pour le 16 février, on peut réfléchir aux exercices 15 et 16.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

16/02. La séance est consacrée à la correction collective des 6 premiers exercices d'entraînement.

Un corrigé complet et (trop) détaillé des dix exercices d'entraînement de CMP3 est mis en ligne dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

Pour le 23 février, on peut reprendre sa réflexion sur les exercices 15 et 16 du polycopié et travailler les 4 derniers exercices de la feuille d'entraînement.

L'ensemble de la promotion est informé que le premier contrôle continu de Maths-Analyse aura lieu le 17 mars, en salle ou amphi. Il durera 90 minutes, la moitié concernera CMP3 et l'autre moitié CMP4. Le même jour est programmé le premier contrôle continu de Mahs-Algèbre, en salle ou amphi. Il durera 90 minutes, la moitié concernera CMP1 et l'autre moitié CMP2.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

23/02. La séance est consacrée à la correction des exercices 15 et 16 du polycopié du septième des dix exercices d'entraînement et, de façon succincte et essentiellement orale, du huitième exercice de la même liste. Dans le cadre de la correction de ce dernier il est établi à l'écrit (sur la tablette) que la fonction g définie par $(gx) = x^4 - x^2$ est minorée par -1, c'est à dire que si $x \in \mathbf{R}$ alors $g(x) \geq -1$. La correction de l'exercice 16 est l'occasion de faire du calcule (et des erreurs de calcul, mea culpa) à partie des formule trigonométriques

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(c) - \sin(a)\sin(b), \\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \\
1 &= \cos^2(a) + \sin^2(a).
\end{aligned}$$

On trouve sur le texte de la tablette deux réponses faites à des questions posées en fin de séance. Il est donné l'exemple de deux fonction non surjectives et dont le produit est une fonction surjective. Il est aussi expliqué pourquoi un polynôme du second degré n'est jamais surjectif. La méthode proposée reprend les calculs qui permettent de résoudre de façon classique les équations du second degré.

Un sujet blanc de contrôle continu sera donné dans la semaine. Il sera à remettre au plus tard le 7 mars.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

09/03. La séance est consacrée pour l'essentiel à la correction du contrôle continu blanc.

Elle se termine par l'introduction des notions de fonctions monotones (strictement monotones), croissantes (strictement croissantes) et décroissantes (strictement décroissantes). Les définitions et des exemples et contre-exemples sont donnés.

La semaine prochaine il n'y aura ni CMP1 ni CMP3 et les contrôles auront lieu pendant les séances de CMP2 et CMP4 qui sont programmées dans le logiciel d'emploi du temps.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

23/03. La séance est consacrée pour l'essentiel à la trigonométrie.

Après avoir donné la définition d'une fonction périodique et établi que la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $x-$partie entière de x est 1-périodique les fonctions cosinus et sinus sont introduites. Leurs premières propriétés sont données et des idées de preuve sont présentées :

$$\begin{aligned}
&\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \\
\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2), \\
\sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \\
\cos(\theta + 2\pi) &= \cos(\theta), \\
\cos(-\theta) &= \cos(\theta), \\
\cos(\theta + \pi) &= -\cos(\theta),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta+2\pi) &= \sin(\theta), \\
\sin(\theta) &= -\sin(\theta), \\
\sin(\theta+\pi) &= -\sin(\theta), \\
\cos'(\theta) &= -\sin(\theta), \\
\sin'(\theta) &= \cos(\theta).
\end{aligned}
$$

La fonction tangente est aussi définie, sa π-périodicité est montrée ainsi que la formule d'addition suivante :

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan(\theta_1)+\tan(\theta_2)}{1-\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}.$$

Les résultats indicatifs du premier contrôle sont communiqués via l'espace d'enseignement à distance de l'université de Rennes 1 (`https://foad.univ-rennes1.fr`)

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

30/03. La séance du jour est une séance marathon. Elle dure 3 heures et est entrecoupée par deux pauses de cinq minutes. La rigueur mathématique n'est pas de mise aujourd'hui. Il s'agit plutôt de donner quelques idées qui guident les théories exposées sans rentrer dans les détails et les précisions indispensables si on avait voulu montrer de façon mathématiquement incontestable ce qui est affirmé.

Une première partie est l'introduction du logarithme népérien vu comme aire et de l'exponentielle vue comme comme réciproque du logarithme. Les propriétés de morphisme du logarithme et de l'exponentielle, ou, de façon moins savante, les égalités

$$\log(ab) = \log(a)+\log(b)$$

et

$$\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y),$$

sont établies. On évoque aussi les dérivées du logarithme et de l'exponentielle ainsi que la limite en $+\infty$ du logarithme. C'est l'occasion de citer Newton et, approximativement, son théorème fondamental de l'analyse qui fait le lien entre calcul d'aire (primitive) et dérivation.

Dans une deuxième partie les notions de continuité et de limite finie sont introduite. Il est prouvé de façon rigoureuse que f définie par $f(x) = 3x+2$ est continue en 1 et que f définie par $f(x) = x^2$ est continue en 2.

Les exemples classiques de fonctions continues sont donnés et le bon comportement de la notion de continuité par addition, multiplication, composition est énoncé. On précise aussi que l'image d'un intervalle (respectivement d'un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).

L'unicité de la limite quand elle existe et le comportement des limites par comparaisons sont énoncés.

La dernière partie de la séance est consacrée à l'introduction de la notion de dérivée. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont expliqués. Une interprétation cinématique de ce dernier est donnée. Une situation pratique avec Brest, Rennes et un tachymètre illustre aussi ce théorème.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams. Une version intégrale du polycopié est désormais accessible dans cet espace. Il s'agit d'un docuent de soixante pages qu'il peut être intéressant de regarder si on souhaite approfondir.

06/04. La séance du jour est une séance marathon. Elle dure 3 heures et est entrecoupée par deux pauses de cinq minutes. Cette séance est réalisée dans le même esprit que la séance précédente.

La première partie est consacrée aux fonctions de **R** dans **R**. On donne quelques exemples de limites classiques, on explique les principales règles de calcul des limites. On établit les propriétés d'inégalité vérifiées par passage à la limite. Après avoir donné des exemples de dérivées on précise les règles de calcul des dérivées et on établit en particulier la règle de Leibniz. On étudie précisément les relations entre monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa dérivée. On introduit la notion de primitive et on explique rapidement les relations entre primitives, intégrales et aires. On évoque le théorème fondamental de l'analyse de Newton. On établit que deux fonctions sont les primitives d'une même fonction définie sur un intervalle si et seulement si elles diffèrent d'une constante. On marque une attention particulière à la primitive d'une fonction continue et positive. On donne des précisions sur le comportement des limites et des dérivées par composition et on établit le calcul de la dérivée d'une réciproque. On conclut la partie en évoquant le calcul de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

La seconde partie, assez brève, est une introduction aux nombres complexes. L'ensemble **C** est présenté comme l'ensemble des couples de réels muni d'une addition et d'une multiplication. On donne les principales propriétés de ces deux opérations en établissant certaines d'entre elles comme le fait que $(0,0)$ et $(1,0)$ soient des neutres pour respectivement l'addition et la multiplication ou l'existence d'inverses pour ces deux opérations. On explique comment **R** peut s'identifier à une sous-partie de **C**, le sous-ensemble des $\{(x,0];x \in \mathbf{R}$. On explique que dans **C** l'équation $z^2 = -1$ qui n'a pas de solution dans **R** en possède deux complexes qu'on note i et $-i$. On montre, plus généralement, que l'équation $z^2 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$ admet deux solutions (une si $\alpha = 0$) et on donne une méthode pour les trouver. On applique cette méthode dans le cas où $\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on donne une interprétation géométrique.

Le deuxième est dernier contrôle continu portera sur l'ensemble de ce qui a été vu en CMP3 ce semestre. Deux sujets blancs avec corrigés seront proposés pour que chacun puisse s'entraîner.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.