Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 2 - 45 minutes

Traiter au choix cinq exercices.

Les réponses sont justifiées.

1/ On rappelle que $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+*}$ est dérivable et vérifie $\exp(0) = 1$ et $\exp' = exp$.

Si $n \in \mathbf{N}$ on considère la fonction dérivable f_n définie par $f_n(x) = \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ si $x \in \mathbf{R}$.

1/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $f'_{n+1} = f_n$.

2/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \geq 0$ alors $f_n(x) \geq 0$.

2/ 1/ Donner la définition de ce qu'est une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ continue en $a \in I$.

2/ En utilisant cette définition et l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ si $x \in \mathbf{R}$, montrer que sin est continue en 0.

3/ 1/ Donner la définition d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable de nombre dérivé $f'(a)$ en $a \in I$.

2/ En revenant à cette définition démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ est dérivable de nombre dérivé $f'(a) = 2a$ si $a \in \mathbf{R}$.

4/ Dans chaque cas suivant dire en justifiant si la fonction f est continue.

Cas 1. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{R}^*$ et $f(0) = 1$.

Cas 2. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x$ si $x \in]-1, 1[$ et $f(-1) = f(1) = 0$.

Cas 3. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

5/ On rappelle que $\ln : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ est dérivable et vérifie $\ln(1) = 0$ et $\ln' = \frac{1}{x}$. On rappelle aussi que $(g \circ h)' = (g' \circ h) \times h'$ si g et h sont dérivables.

Soit $a > 0$.

1/ En utilisant ces rappels calculer la dérivée de $f : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \ln(ax)$.

2/ En déduire que la fonction qui à $x > 0$ associe $f(x) - \ln(x)$ est constante.

3/ Montrer que si $x > 0$ alors $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

6/ Calculer $\int_1^x \ln(t)dt$ si $x > 0$.