Une solution de l'exercice 5 du CC2 blanc de CMP3 2021-2022

1/ On applique la formule $(g\circ h)' = (g'\circ h)\times h'$ avec $g = \ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$
$h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $h(x) = ax$. On obtient que si $x \in \mathbb{R}^{+*}$
alors $f(x) = g\circ h(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $h'(x) = a$. Par conséquent
si $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g\circ h)'(x) \\ &= (g'\circ h)(x) \times h'(x) \\ &= g'(h(x)) \times h'(x) \\ &= \frac{1}{ax} \times a = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Conclusion. $\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \frac{1}{x}}$

2/ Soit $c : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$c(x) = f(x) - \ln(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^{+*}$$

On a donc $c(x) = f(x) - g(x)$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$
Par conséquent, si $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\begin{aligned} c'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La dérivée de c est nulle. Puisque c est définie sur un intervalle, ceci implique que c est constante.

Conclusion. $\boxed{\text{La fonction } c \text{ qui à } x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ associe } c(x) = f(x) - \ln(x) \text{ est constante.}}$

3/ Puisque la fonction c est constante et que $c(1) = f(1) - \ln(1)$
c'est à dire

$$\begin{aligned} c(1) &= \ln(1.a) - \ln(1) \\ &= \ln(a) - \ln(1) \\ &= \ln(a) \end{aligned}$$

car $\ln(1) = 0$. Il vient si $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $c(x) = f(x) - \ln(x) = \ln(a)$
et donc $\ln(ax) = f(x) = \ln(a) + \ln(x)$.

Conclusion. $\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)}$