Une solution de l'exercice 4 du CC2 blanc de CMP3 2021-2022

Soit f une fonction.

Cas 1 On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{R}^*$ et $f(0)=1$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle et $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$ ne contient pas 0 alors qu'il contient $-1=f(-1)$ et $f(1)=1$. Or d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si f était continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ devrait contenir toute valeur (donc 0) comprise entre $-1=f(-1)$ et $f(1)=1$. Donc f n'est pas continue.

Cas 2 On suppose que f est définie sur le segment $[-1,1]$ par $f(x)=x$ si $x\in]-1,1[$ et $f(-1)=f(1)=0$.
L'ensemble $[-1,1]$ est un segment mais $f([-1,1])=]-1,1[$ n'est pas un segment. Or l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Par conséquent la fonction f n'est pas continue.

Cas 3 On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ si $x>0$ et $f(x)=0$ si $x\leq 0$.
Montrons que f est continue en tout $a\in\mathbb{R}$.
Soit $a>0$ et $\varepsilon>0$. On pose $k=\min(a,\varepsilon)$. On a $k>0$ et si $x\in]a-k,a+k[$ alors $x>0$ et donc $f(x)=x$ et $f(a)=a$. Par conséquent $|f(x)-f(a)|=|x-a|<k\leq\varepsilon$.
Ainsi $\forall\varepsilon>0\ \exists k>0\ \forall x\in]a-k,a+k[\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.
La fonction f est bien continue en a si $a>0$
Soit $a<0$ et $\varepsilon>0$. On pose $k=\min(|a|,\varepsilon)$. On a $k>0$ et si $x\in]a-k,a+k[$ alors $x<0$ et donc $f(x)=f(a)=0$. Par conséquent $|f(x)-f(a)|=|0-0|=0<k\leq\varepsilon$.
Ainsi $\forall\varepsilon>0\ \exists k>0\ \forall x\in]a-k,a+k[\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.
La fonction f est bien continue en a si $a<0$.
Soit $a=0$ et $\varepsilon>0$. On pose $k=\varepsilon$. On a $k>0$.

Soit $x \in]a-k, a+k[=]-k, k[$.

Si $x \leq 0$ alors $f(x) = f(a) = f(0) = 0$

et donc $|f(x) - f(a)| = 0 < k = \varepsilon$

Si $x > 0$ alors $f(x) = x$ et $f(a) = f(0) = 0$

et donc $|f(x) - f(a)| = |x - a| = |x| = x < k$

Finalement on a bien $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 \ \forall x \in]0-k, 0+k[\ |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

La fonction f est bien continue en $a = 0$.

On vient de prouver que f est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
Par conséquent f est continue.

Commentaire Les cas 1 et 2 correspondent à l'application directe des résultats énoncés en bas des pages 5 et 6 du document cmp3-en-visio-2022-03-30.pdf. Le cas 3 est traité par un retour à la définition de continuité en un point qui se trouve à la page 7 du document cmp3-en-visio-2022-03-09.pdf.