Une solution de l'exercice 2 du CC2 blanc de CMP3 2021-2022

1/ Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 \ \forall x \in]a-k, a+k[\quad |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

2/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction sinus : si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.
D'après l'énoncé si $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| = |\sin(x)| \leq |x|$ et donc, puisque $f(0) = \sin(0) = 0$, on a $|f(x) - f(0)| \leq |x - 0|$.
Ceci signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(0)| \leq |x - 0| \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $K = \varepsilon$. On a $\eta > 0$ et si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-0| < K$ alors, d'après $(*)$ $|f(x) - f(0)| \leq |x - 0| < K = \varepsilon$

Ainsi on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 \ (\text{prendre } K = \varepsilon) \ \forall x \in]0-K, 0+K[\quad |f(x) - f(0)| < K$$

Ceci signifie que la fonction f qui est la fonction sinus est continue en 0.

Commentaires.

1/ On trouve la définition de la continuité d'une fonction en un point dans le document cmp3-en-visio-2022-03-09.pdf, page 7.

2/ On trouve une preuve de la continuité de la fonction sinus en 0 dans le document cmp3-en-visio-2022-03-16.pdf, page 10.