Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 2 - 45 minutes

Solution de la question 2 de l'exercice 1.

1/ On rappelle que $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+*}$ est dérivable et vérifie $\exp(0) = 1$ et $\exp' = exp$.

Si $n \in \mathbf{N}$ on considère la fonction dérivable f_n définie par $f_n(x) = \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$ si $x \in \mathbf{R}$.

1/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $f'_{n+1} = f_n$.

2/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \geq 0$ alors $f_n(x) \geq 0$.

Avant de donner une réponse à cette question donnons les "ingrédients" qui seront utilisés :
1/ le premier est qu'une fonction dérivable est croissante sur un intervalle I dès que sa dérivée est positive ou nulle sur cet intervalle ;
2/ le second est la réponse à la question 1 de l'exercice ($f'_{n+1} = f_n$) ;
3/ le troisième est le raisonnement par récurrence ;
4/ le quatrième est l'ensemble des propriétés de l'exponentielle, en particulier qu'elle est strictement positive, qu'elle est égale à sa dérivée et que $\exp(0) = 1$.

Répondons maintenant à la question 2.

Pour tout entier naturel n on considère la propriété P_n suivante :

si x supérieur ou égal à 0 alors $f_n(x)$ est supérieur ou égal à 0" (P_n).

On va faire un raisonnement par récurrence (troisième ingrédient) pour prouver que pour tout entier naturel n la propriété P_n est vraie.

Initialisation. La fonction f_0 est définie par $\exp(x) - 1$ si x réel. Sa dérivée qui est l'exponentielle est donc strictement positive (quatrième ingrédient). La fonction f_0 est donc croissante (premier ingrédient). Or $f_0(0) = \exp(0) - 1 = 0$ (quatrième ingrédient). Donc si x est supérieur ou égal à 0, puisque f_0 est croissante, on a $f_0(x)$ supérieur ou égal à $f_0(0)$ qui vaut 0. On vient ainsi d'établir la propriété au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier naturel. On suppose P_n vraie. Puisque $f'_{n+1} = f_n$ (second ingrédient) et puisque $f_n(x)$ est supérieur ou égal à 0 si x est supérieur ou égal à 0 (hypothèse de récurrence) la fonction f_{n+1} est croissante sur $[0, +\infty[$ (premier ingrédient) et donc si x est supérieur ou égal à 0 on a $f_{n+1}(x)$ supérieur ou égal à $f_{n+1}(0)$. Or $f_{n+1}(0) = \exp(0) - 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}0^k = 0$ car $\exp(0) = 1$

(quatrième ingrédient). Par conséquent si x supérieur ou égal à 0 alors $f_{n+1}(x)$ est supérieur ou égal à 0. Ainsi P_{n+1} est vraie. On vient de montrer que P_n est héréditaire.

Puisque P_n est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire elle est vraie pour tout entier naturel n (troisième ingrédient).