Une solution de l'exercice 1 question 1 du CC2 blanc de CMP3 2021-2022

On va montrer par récurrence sur n que si $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est défini par $f_n(x) = \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ si $x \in \mathbb{R}$ alors $f'_{n+1} = f_n$ (P_n).

<u>Initialisation</u> On a $f_0(x) = \exp(x) - 1$

et $f_1(x) = \exp(x) - 1 - x$

si $x \in \mathbb{R}$.

Donc
$$\begin{aligned} f'_1(x) &= \exp'(x) - 1' - x' \\ &= \exp(x) - 0 - 1 \\ &= \exp(x) - 1 \\ &= f_0(x). \end{aligned}$$

La propriété P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u>. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose P_n vraie : $f'_{n+1} = f_n$.

On a
$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \exp(x) - \sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{k!} x^k \\ &= \underbrace{\boxed{\exp(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} x^k}}_{= f_{n+1}} - \frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} \\ &= f_{n+1}(x) - \frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} \end{aligned}$$

Par conséquent $f'_{n+2}(x) = f'_{n+1}(x) - \left(\frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} \right)'$

Or l'hypothèse de récurrence dit $f'_{n+1} = f_n$

De plus
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} \right)' &= (n+2) \frac{1}{(n+2)!} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $f'_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$

$$= \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k - \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \exp(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} x^k$$

$$= f_{n+1}(x)$$

Ainsi P_{n+1} est vraie lorsque P_n est vraie.

Puisque P_n est héréditaire et vraie au rang 0, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.