Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 1 - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Soit z un nombre complexe de module 1 mais différent de -1. On note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire.

1/ Démontrer l'égalité $x^2+y^2=1$.

Le nombre complexe z est égal à $z=x+iy$. Son module, $|z|$, vaut $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Puisque le z considéré est de module 1 il vient donc $1=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. En élevant au carré on obtient $x^2+y^2=1$ puisque $x^2+y^2\geq 0$.

2/ En déduire les inégalités $-1<x\leq 1$ et $-1\leq y\leq 1$.

Puisque x et y sont des réels, leurs carrés x^2 et y^2 vérifient $x^2\geq 0$ et $y^2\geq 0$.

Or $x^2+y^2=1$. Donc $x^2=1-y^2\leq 1$ car $y^2\geq 0$ et $y^2=1-x^2\leq 1$ car $x^2\geq 0$.

De $x^2\leq 1$ et $y^2\leq< 1$ on déduit que $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$ car $|x|$ et $|y|$ sont des réels positifs ou nuls dont les carrés sont respectivement égaux à x^2 et y^2 et la fonction qui à tout réel positif ou nul associe son carré est croissante.

Puisque, par définition de la valeur absolue, les inégalités $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$ sont équivalentes respectivement à $-1\leq x\leq 1$ et $-1\leq y\leq 1$ ces dernières sont bien vraies.

Or par hypothèse z n'est pas égal à -1 et donc x n'est pas égal à -1 car le seul complexe de module 1 et dont la partie réelle est -1 est -1. Ainsi $-1\leq x\leq 1$ et $x\neq -1$ donc $-1<x\leq 1$.

3/ On pose $u=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, $v=\dfrac{y}{\sqrt{2(1+x)}}$. Vérifier que v est bien défini et montrer que $w=u+iv$ vérifie $w^2=z$.

Puisque $-1<x\leq 1$ le nombre $2(1+x)$ est strictement positif et sa racine carré $\sqrt{2(1+x)}$ est bien définie et est non nulle. Par conséquent $\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}$ est bien défini et donc $v=\dfrac{y}{\sqrt{2(1+x)}}$ aussi.

Pour calculer w^2 on va utiliser l'identité $(a+ib)^2=(a^2-b^2)+i(2ab)$.

Puisque $w = u + iv$ il vient

$$\begin{aligned}
w^2 &= (u+iv)^2 \\
&= (u^2 - v^2) + i(2uv) \\
&= \left(\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2(1+x)}}\right)^2\right) + i\left(2\sqrt{\frac{1+x}{2}} \times \frac{y}{\sqrt{2(1+x)}}\right) \\
&= \left(\frac{1+x}{2} - \frac{y^2}{2(1+x)}\right) + i\left(2 \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2\times 2(1+x)}} \times y\right) \\
&= \left(\frac{(1+x)^2 - y^2}{2(1+x)}\right) + i\left(2 \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4(1+x)}} \times y\right) \\
&= \left(\frac{1+2x+x^2-y^2}{2(1+x)}\right) + iy \\
&= \left(\frac{x^2+y^2+2x+x^2-y^2}{2(1+x)}\right) + iy \text{ (car } x+y=1) \\
&= \left(\frac{2x^2+2x}{2(1+x)}\right) + iy \\
&= \left(\frac{2x+2}{2(1+x)}\right)x + iy \\
&= x + iy \\
&= z.
\end{aligned}$$

2/ On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \exp(x) - x$.

1/ Montrer que la fonction f est strictement croissante.

La fonction f qui est la différence de deux fonctions dérivables et pour tout x dans $\mathbf{R}^+$ sa dérivée f' vérifie $f'(x) = \exp(x) - 1$ puisque la dérivée de exp est exp et la dérivée de $-x$ est -1.

Or l'exponentielle est strictement croissante, car $\exp = \exp'$ est strictement positive sur $\mathbf{R}$. Donc si $x > 0$ alors $\exp(x) > \exp(0) = 1$. Ainsi si $x > 0$, $f'(x) = \exp(x) - 1 > 0$.

Puisque la dérivée f' est strictement positive pour tout $x > 0$ et que la fonction f est continue en 0, la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ est strictement croissante.

2/ En déduire que si $x \in \mathbf{R}^+$ alors $\exp(x) > x$.

La fonction f est strictement croissante et $f(0) = \exp(0) - 0 = 1 - 0 = 1$. Par conséquent si $x \in \mathbf{R}^+$ alors $\exp(x) - x = f(x) \geq f(0) = 1 > 0$ et donc $\exp(x) > x$.

3/ Montrer que si $x > 0$ alors $\dfrac{\exp(x)}{x} = \dfrac{1}{2}\exp(\dfrac{x}{2})\dfrac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$.

On va utiliser la propriété de morphisme de l'exponentielle qui transforme somme en produit : si $a, b \in \mathbf{R}$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Si $x > 0$ appliquons la propriété ci-avant avec $a = b = \frac{x}{2}$. On obtient

$$\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2}) \times \exp(\frac{x}{2}).$$

En divisant par $\frac{x}{2}$ qui est non nul il vient

$$\frac{\exp(x)}{\frac{x}{2}} = \frac{\exp(\frac{x}{2}) \times \exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$$

puis en multipliant par $\frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{\exp(x)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\exp(\frac{x}{2}) \times \exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{\exp(x)}{x} = \frac{1}{2}\exp(\frac{x}{2})\frac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}.$$

4/ En déduire que $x \in \mathbf{R}^+$ alors $\exp(x) > \frac{1}{4}x^2$.

Puisque $\exp(0) = 1 > 0 = \frac{1}{4}0^2$ il reste à prouver l'inégalité $\exp(x) > \frac{1}{4}x^2$ pour $x > 0$.

Considérons donc $x > 0$. D'après 3/ on a

$$\frac{\exp(x)}{x} = \frac{1}{2}\exp(\frac{x}{2})\frac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$$

et donc

$$\exp(x) = \frac{1}{2}x\exp(\frac{x}{2})\frac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}.$$

Or d'après 2/ appliqué à $\frac{x}{2}$ on a $\exp(\frac{x}{2}) > \frac{x}{2} > 0$ et donc $\dfrac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} > 1$.

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \frac{1}{2}x\exp(\frac{x}{2})\frac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\\ &> \frac{1}{2}x \times \frac{x}{2} \times 1 \text{ (car } \exp(\frac{x}{2}) > \frac{x}{2} > 0 \text{ et } \frac{\exp(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} > 1)\\ &> \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

3/ Démontrer que la fonction tangente est dérivable et que si $x \in \mathbf{R}$ et $\dfrac{x}{2\pi}$ n'est pas un entier relatif alors

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

[petit rappel sur les fonctions sinus et cosinus. Les fonctions sin et cos sont des fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}$, continues et dérivables. Elle vérifient $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. La fonction sin est impaire, la fonction cos paire. Elles sont aussi 2π périodiques. Elles vérifient $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et si $x \in \mathbf{R}$ alors $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. La fonction cos s'annule exactement sur $\{z = \frac{\pi}{2} + n\pi | n \in \mathbf{Z}\}$ c'est à dire exactement en tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $\dfrac{x}{2\pi}$ est pas un entier relatif.]

La fonction tangente est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ si $x \in \mathbf{R}$ et $\cos(x) \neq 0$. Elle est donc définie si $x \in \mathbf{R} \setminus \{z = \frac{\pi}{2} + n\pi | n \in \mathbf{Z}\}$ c'est à dire pour tout réel x tel que $\dfrac{x}{2\pi}$ n'est pas un entier relatif.

Puisque sin et cos sont dérivables et que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, la fonction tan est bien dérivable et si x est un réel tel que $\frac{x}{2\pi}$ n'est pas un entier relatif alors

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) \\
&= \left(\frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2}\right)(x) \\
&= \left(\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}\right)(x) \\
&= \left(\frac{1}{\cos^2}\right)(x) \text{ (car } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1) \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}\right)(x) \\
&= \left(1 + \frac{\sin^2}{\cos^2}\right)(x) \\
&= 1 + \left(\frac{\sin}{\cos}\right)^2(x) \\
&= 1 + \tan^2(x).
\end{aligned}$$