

**Compléments maths PASS 3 (CMP3)**  
*Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)*  
**Contrôle continu blanc 1 - 45 minutes**

Les réponses sont justifiées.

**1/** Soit  $z$  un nombre complexe de module 1 mais différent de  $-1$ . On note  $x$  sa partie réelle et  $y$  sa partie imaginaire.

1/ Démontrer l'égalité  $x^2 + y^2 = 1$ .

2/ En déduire les inégalités  $-1 < x \leq 1$  et  $-1 \leq y \leq 1$ .

3/ On pose  $u = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ ,  $v = \frac{y}{\sqrt{2(1+x)}}$ . Vérifier que  $v$  est bien défini et montrer que  $w = u + iv$  vérifie  $w^2 = z$ .

**2/** On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}^+$  par  $f(x) = \exp(x) - x$ .

1/ Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante.

2/ En déduire que si  $x \in \mathbf{R}^+$  alors  $\exp(x) > x$ .

3/ Montrer que si  $x > 0$  alors  $\frac{\exp(x)}{x} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$ .

4/ En déduire que  $x \in \mathbf{R}^+$  alors  $\exp(x) > \frac{1}{4}x^2$ .

**3/** Démontrer que la fonction tangente est dérivable et que si  $x \in \mathbf{R}$  et  $\frac{x}{2\pi}$  n'est pas un entier relatif alors

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$