Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu 2 - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ On considère une fonction g de $]0,+\infty)$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifie $g(t\times s)=g(t)+g(s)$ si $t,s\in]0,+\infty)$.

a) Montrer que $g(1)$ est solution de l'équation $x=2x$ et en déduire que $g(1)=0$.

b) Soit $t\in]0,+\infty)$. Montrer que $2g(t)=g(t^2)$ et que $g(\frac{1}{t})=-g(t)$.

2/ Soient $f:\mathbf{R}\setminus\{\frac{7}{3}\}\to\mathbf{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{5-2x}{7-3x}$ et $g:\mathbf{R}\setminus\{\frac{2}{3}\}\to\mathbf{R}$ définie par $g(x)=\dfrac{5-7x}{2-3x}$.

a) Montrer que $\frac{2}{3}$ n'a pas d'antécédent par f et que $\frac{7}{3}$ n'a pas d'antécédent par g.

b) Les fonctions f et g sont-elles surjectives ?

c) Calculer $g(f(x))$ si $x\in\mathbf{R}\setminus\{\frac{7}{3}\}$ et $f(g(x))$ si $x\in\mathbf{R}\setminus\{\frac{2}{3}\}$.

d) Les fonctions f et g sont-elles injectives ?

3/ Soit $f:]1,2[\to\mathbf{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Soit $\varepsilon>0$ et soient $a,x\in]1,2[$. Montrer que $a\times x>1$ et que si $|x-a|<\varepsilon$ alors $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

b) L'affirmation

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall a\in]1,2[\ \forall x\in]1,2[\ (|x-a|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$$

est-elle vraie ?