Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 2 (2) - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ On considère une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifie $0 < f(0)$ et $f(t+s) = f(t) \times f(s)$ si $t, s \in \mathbf{R}$.

a) Montrer que $f(0)$ est solution de l'équation $x^2 - x = 0$ et en déduire que $f(0) = 1$.

b) Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ alors $f(\frac{t}{2})^2 = f(t)$.

c) Résoudre l'équation $f(t) = -1$ où l'inconnue est $t \in \mathbf{R}$.

2/ Soient $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ et $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ définies par

$$f(x) = x^2 + 2x \text{ et } g(x) = \sqrt{1+x} - 1.$$

a) Montrer que f est strictement croissante et en déduire que $f([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$.

b) Montrer que g est strictement croissante et en déduire que $g([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$.

c) Les fonctions f et g sont-elles surjectives ?

d) Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$ si $x \in [0, +\infty)$.

e) Les fonctions f et g sont-elles injectives ?

3/ Soit $f :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et soient $a, x \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer que $x + a < 1$ et que si $|x - a| < \varepsilon$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

b) L'affirmation

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall a \in]0, \frac{1}{2}[\ \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\ (|x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

est-elle vraie ?

c) Dire pourquoi f est continue en tout $a \in]0, \frac{1}{2}[$.