Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 2 (2) - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ On considère une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifie $0 < f(0)$ et $f(t+s) = f(t) \times f(s)$ si $t, s \in \mathbf{R}$.

a) Montrer que $f(0)$ est solution de l'équation $x^2 - x = 0$ et en déduire que $f(0) = 1$.

En appliquant $f(t+s) = f(t) \times f(s)$ avec $t = s = 0$ et en utilisant le fait que $0+0 = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+0) \\ &= f(0) \times f(0) \\ &= f(0)^2 \end{aligned}$$

et donc, par différence $f(0)^2 - f(0) = 0$. Ceci signifie que $f(0)$ est solution de l'équation $x^2 - x = 0$. Or cette équation s'écrit aussi $x \times (x-1) = 0$. Puisque un produit de deux nombres est nul si et seulement si l'un des deux nombres est nul, x est solution de l'équation $x^2 - x = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x - 1 = 0$, c'est à dire si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$. Ainsi $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Or, par hypothèse $f(0) > 0$. Par conséquent $f(0) = 1$.

b) Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ alors $f(\frac{t}{2})^2 = f(t)$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. En appliquant $f(t+s) = f(t) \times f(s)$ avec $t = s = \frac{x}{2}$ et en utilisant l'égalité $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) \\ &= f(\frac{x}{2}) \times f(\frac{x}{2}) \\ &= f(\frac{x}{2})^2. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $f(\frac{x}{2})^2 = f(x)$. Ce qui vaut pour tout x vaut pour tout t et donc si $t \in \mathbf{R}$ alors $f(\frac{t}{2})^2 = f(t)$.

c) Résoudre l'équation $f(t) = -1$ où l'inconnue est $t \in \mathbf{R}$.

Soit $t \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) = -1$. D'après la question b) on a $-1 = f(t) = f(\frac{t}{2})^2$ et donc -1 serait un carré. Ceci est impossible car le carré d'un réel est toujours strictement positif. Aussi l'équation $f(t) = -1$ n'admet pas de solution réelle.

2/ Soient $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ et $g : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ définies par

$$f(x) = x^2 + 2x \text{ et } g(x) = \sqrt{1+x} - 1.$$

a) Montrer que f est strictement croissante et en déduire que $f([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$.

Soient $x, x' \in [0,+\infty)$ tels que $x < x'$. Alors $2x < 2x'$ (la multiplication par le réel strictement positif 2 respecte l'ordre). Puisque $0 \le x < x'$, x' est strictement positif et donc $x^2 < x \times x' < x'^2$ (les multiplications par les réels strictement positifs x et x' respectent l'ordre) et donc $x^2 < x'^2$ et puisque la somme respecte l'ordre on a

$$f(x) = x^2 + 2x < x'^2 + 2x < x'^2 + 2x' = f(x').$$

Ainsi si $x, x' \in [0,+\infty)$ sont tels que $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$. Ceci signifie que f est strictement croissante.

Puisque $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante, si $0 \le x$ alors $0 = f(0) \le f(x)$. Ainsi on obtient $f([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$.

b) Montrer que g est strictement croissante et en déduire que $g([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$.

Soient $x, x' \in [0,+\infty)$ tels que $x < x'$. Alors $1 + x < 1 + x'$ (l'addition par 1 respecte l'ordre strictement), $\sqrt{1+x} < \sqrt{1+x'}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante) et donc, puisque l'addition par -1 respecte l'ordre strictement,

$$g(x) = \sqrt{1+x} - 1 < \sqrt{1+x} - 1 = g(x').$$

Ainsi si $x, x' \in [0,+\infty)$ sont tels que $x < x'$ alors $g(x) < g(x')$. Ceci signifie que g est strictement croissante.

Puisque $g(0) = 0$ et que g est strictement croissante, si $0 \le x$ alors $0 = g(0) \le g(x)$. Ainsi on obtient $g([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$.

c) Les fonctions f et g sont-elles surjectives ?

Puisque l'ensemble d'arrivée de f est $\mathbf{R}$ pour que la fonction f soit surjective il faudrait que tout réel possède un antécédent par f. Ce n'est pas le cas de -1 par exemple puisque $f([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$. Ainsi f n'est pas surjective.

Puisque l'ensemble d'arrivée de g est $\mathbf{R}$ pour que la fonction g soit surjective il faudrait que tout réel possède un antécédent par g. Ce n'est pas le cas de -1 par exemple puisque $g([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$. Ainsi g n'est pas surjective.

d) Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$ si $x \in [0,+\infty)$.

Si $x \in [0,+\infty)$ alors

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= \sqrt{1 + (x^2 + 2x)} - 1 \\
&= \sqrt{(1+x)^2} - 1 \text{ (car } 1 + (x^2 + 2x) = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2\text{)} \\
&= (1+x) - 1 \text{ (car } x \ge 0 \text{ donc } x + 1 \ge 0 \text{ et } x + 1 = \sqrt{(1+x)^2}\text{)} \\
&= x
\end{aligned}$$

et si $x \in [0,+\infty)$ alors

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \left(\sqrt{1+x}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{1+x}-1\right) \\ &= \left((1+x)-2\sqrt{1+x}+1\right) + 2\left(\sqrt{1+x}-1\right) \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi si $x \in [0,+\infty)$ alors $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.

e) Les fonctions f et g sont-elles injectives ?

Soient $x, x' \in [0,+\infty)$. Si $f(x) = f(x')$ alors, d'après d), $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$. Ceci signifie que f est injective.

Soient $x, x' \in [0,+\infty)$. Si $g(x) = g(x')$ alors, d'après d), $x = f(g(x)) = f(g(x')) = x'$. Ceci signifie que g est injective.

3/ Soit $f :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et soient $a, x \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer que $x + a < 1$ et que si $|x-a| < \varepsilon$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Soient $a, x \in]0, \frac{1}{2}[$ tels que $|x-a| < \varepsilon$. Alors $0 < x < \frac{1}{2}$ et $0 < x < \frac{1}{2}$ donc

$$0 < |x+a| = x+a < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

De plus

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| \\ &= |(x-a)(x+a)| \\ &\leq |x-a| \times |x+a| \\ &\leq |x-a| \text{ (car } |x+a| = x+a < 1) \\ &< \varepsilon \text{ (car } |x-a| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, si $a, x \in]0, \frac{1}{2}[$ sont tels que $|x-a| < \varepsilon$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

b) L'affirmation

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall a \in]0, \tfrac{1}{2}[\ \forall x \in]0, \tfrac{1}{2}[\ (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

est-elle vraie ?

Cette affirmation est vraie. En effet si $\varepsilon > 0$ on pose $\eta = \varepsilon$. Alors d'après la question précédente, si $a, x \in]0, \frac{1}{2}[$ sont tels que $|x-a| < \eta = \varepsilon$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

c) Dire pourquoi f est continue en tout $a \in]0, \frac{1}{2}[$.

De façon générale une affirmation du type "...$\exists A \ \forall B$..." implique l'affirmation "...$\forall B \ \exists A$...". C'est pourquoi l'affirmation

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall a \in]0, \tfrac{1}{2}[\ \forall x \in]0, \tfrac{1}{2}[\ (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

entraîne l'affirmation

$$\forall a \in]0,\frac{1}{2}[\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in]0,\frac{1}{2}[\ (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

qui signifie qu'en tout $a \in]0,\frac{1}{2}[$ la fonction f est continue.