

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 2 (1) - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ a) Pourquoi existe-t-il $e \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(e) = 1$.

b) Calculer la dérivée de la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x \ln(x) - x$.

c) Calculer $\int_1^e \ln(x) dx$.

2/ On admet que si $a, b \in \mathbf{R}$ alors

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b),$$

$$1 = \cos^2(a) + \sin^2(a).$$

a) Montrer que si $a, b \in \mathbf{R}$ sont tels que $a+b - \frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple de π alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

b) Que se passe-t-il si $a+b - \frac{\pi}{2}$ est un multiple de π ?

3/ Soient $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{4-3x}{1-x}$ et $g : \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \frac{4-x}{3-x}$.

a) Montrer que 3 n'a pas d'antécédent par f et que 1 n'a pas d'antécédent par g .

b) Les fonctions f et g sont-elles surjectives ?

c) Calculer $g(f(x))$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $f(g(x))$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

d) Les fonctions f et g sont-elles injectives ?