Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu blanc 2 (1) - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ a) Pourquoi existe-t-il $e \in]0,+\infty)$ tel que $\ln(e)=1$.

La fonction exp, l'exponentielle, est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,+\infty)$ et sa réciproque est la fonction ln, le logarithme. Si on pose $e=\exp(1)$ alors on a bien $\ln(e)=\ln(\exp(1))=(\ln\circ\exp)(1)=1$.

b) Calculer la dérivée de la fonction $f:]0,+\infty)\to\mathbf{R}$ définie par $f(x)=x\ln(x)-x$.

En utilisant d'une part les règles de dérivation $(g+h)'=g'+h'$, $(\lambda g)'=\lambda g'$ et $(gh)'=g'h+gh'$ et en utilisant le fait que $(x)'=1$ et le fait que $(\ln)'=\dfrac{1}{x}$ on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'\ln(x)+x(\ln)'(x)-1 \\ &= \ln(x)+x\frac{1}{x}-1 \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

si $x\in]0,+\infty)$. On vient de prouver que si $x\in]0,+\infty)$ on a $f'(x)=\ln(x)$ et donc que f est la primitive de ln.

c) Calculer $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$.

Puisque la fonction f est la primitive de ln, l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$ est égale à la variation de f entre 1 et e c'est à dire à $f(e)-f(1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x)dx &= f(e)-f(1) \\ &= (e\ln(e)-e)-(1\ln(1)-1) \\ &= (e\times 1-e)-(1\times 0-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi on a $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx=1$.

2/ On admet que si $a,b\in\mathbf{R}$ alors

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b), \\ 1 &= \cos(a)^2+\sin^2(a). \end{aligned}$$

a) Montrer que si $a, b \in \mathbf{R}$ sont tels que $a+b-\frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple de π alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

Si $a+b-\frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple de π alors $\cos(a+b) \neq 0$ et donc $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ est définie et

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \text{(on applique les formules donnant } \cos(a+b) \text{ et } \sin(a+b)\text{)} \\
&= \frac{\cos(a)\cos(b)\times\left(\frac{\sin(b)}{\cos(b)}+\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\right)}{\cos(a)\cos(b)\times\left(1-\frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}\right)} \text{(on factorise en haut et en bas par } \cos(a)\cos(b)\text{)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} \\
&= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'égalité.

b) Que se passe-t-il si $a+b-\frac{\pi}{2}$ est un multiple de π ?

Si $a+b-\frac{\pi}{2}$ est un multiple de π alors $\cos(a+b)=0$ et $\tan(a+b)$ n'est pas définie.

3/ Soient $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{4-3x}{1-x}$ et $g : \mathbf{R}\setminus\{3\} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \frac{4-x}{3-x}$.

a) Montrer que 3 n'a pas d'antécédent par f et que 1 n'a pas d'antécédent par g.

Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$ tel que $f(x)=3$. On a alors

$$\begin{aligned}
3 &= f(x) \\
&= \frac{4-3x}{1-x}
\end{aligned}$$

et donc, en multipliant par $1-x$ qui est non nul il vient $3-3x = 4-3x$, puis, en ajoutant $3x$ on obtient $3=4$ qui est impossible. Par conséquent il n'existe pas de $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$ tel que $f(x)=3$. Ceci signifie que 3 n'a pas d'antécédent par f.

Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{3\}$ tel que $g(x)=1$. On a alors

$$\begin{aligned}
1 &= g(x) \\
&= \frac{4-x}{3-x}
\end{aligned}$$

et donc, en multipliant par $3-x$ qui est non nul il vient $3-x = 4-x$, puis, en ajoutant x on obtient $3=4$ qui est impossible. Par conséquent il n'existe pas de $x \in \mathbf{R}\setminus\{3\}$ tel que $g(x)=1$. Ceci signifie que 1 n'a pas d'antécédent par g.

b) Les fonctions f et g sont-elles surjectives ?

Ces deux fonctions ont comme ensemble d'arrivée $\mathbf{R}$. Or, comme 3 n'a pas d'antécédent par f, la fonction f n'est pas surjective et comme 1 n'a pas d'antécédent par g, la fonction g n'est pas surjective.

c) Calculer $g(f(x))$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $f(g(x))$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

Puisque f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, que 3 n'a pas d'antécédent par f et que g est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ on peut calculer $g(f(x))$ si $x \neq 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{4 - \frac{4-3x}{1-x}}{3 - \frac{4-3x}{1-x}} \\ &= \frac{\frac{4(1-x)-(4-3x)}{1-x}}{\frac{3(1-x)-(4-3x)}{1-x}} \\ &= \frac{\frac{4-4x-4+3x}{1-x}}{\frac{3-3x-4+3x}{1-x}} \\ &= \frac{-x}{-1} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 1$ alors $g(f(x) = x$.

Puisque g est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{3\}$, que 1 n'a pas d'antécédent par g et que f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ on peut calculer $f(g(x))$ si $x \neq 3$ et on obtient

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{4 - 3\frac{4-x}{3-x}}{1 - \frac{4-x}{3-x}} \\ &= \frac{\frac{4(3-x)-3(4-x)}{3-x}}{\frac{(3-x)-(4-x)}{3-x}} \\ &= \frac{\frac{12-4x-12+3x}{3-x}}{\frac{3-x-4+x}{3-x}} \\ &= \frac{-x}{-1} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 3$ alors $f(g(x) = x$.

d) Les fonctions f et g sont-elles injectives ?

Soient $x, x' \in \mathbf{R}$ différents de 1. Si $f(x) = f(x')$ alors, d'après c), $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$. Par conséquent si deux réels de l'ensemble de départ de f ont même image par f ils sont égaux. Ceci signifie que f est injective.

Soient $x, x' \in \mathbf{R}$ différents de 3. Si $g(x) = g(x')$ alors, d'après c), $x = f(g(x)) = f(g(x')) = x'$. Par conséquent si deux réels de l'ensemble de départ de g ont même image par g ils sont égaux. Ceci signifie que g est injective.