Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu 2 BIS - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ On considère une fonction g de $[0,+\infty)$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifie $g(t+s) = g(t)+g(s)$ si $t,s \in [0,+\infty)$.

a) Montrer que $g(0)$ est solution de l'équation $x = 2x$ et en déduire que $g(0) = 0$.

b) Montrer par récurrence que si $n \in \mathbf{N}$ et si $x \in [0,+\infty)$ alors $g(nx) = n \times g(x)$.

2/ Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x \times |x|$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $g(x) = -\sqrt{-x}$ si $x < 0$.

a) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

b) Les fonctions f et g sont-elles bijectives ?

3/ Soit $f :]1,2[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Soient $a,x \in]1,2[$. Montrer que $|f(x)-f(a)| = \dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et soient $a,x \in]1,2[$. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{a} > 1$ et que si $|x-a| < \varepsilon$ alors $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

c) Soit $a \in]1,2[$. Montrer que f est continue en a.