Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Résumé des séances

L'enseignement de CMP1 repose sur un document pdf appelé cmp1-2022-2023.pdf et accessible à partir de la page https://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion/cmp1 qui permet d'accéder à une liste d'exercices, aux règles d'évaluation.

04/01. La séance aborde les notions de finitude, d'application, de bijection, de récurrence, de cardinal, d'ensemble, de sous-ensemble et de partie. Dans un premier temps est donnée une définition surprenante de ce qu'est un ensemble infini et il est montré que l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels est bien infini avec cette définition. Ensuite il est expliqué ce qu'est le principe du raisonnement par récurrence. Pour illustrer le fonctionnement de ce prince on établit deux résultats par récurrence. En particulier on montre que si $x \geq 0$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $(1+x)^n \geq nx+1$. On montre aussi en quoi il est important de vérifier que la propriété étudiée est vraie au rang 0 (initialisation) en donnant l'exemple d'une propriété héréditaire mais qui est fausse à tout rang. Il est expliqué le lien entre l'inégalité $2^n \geq n+1$ (c'est une application de l'inégalité $(1+x)^n \geq nx+1$) et le fait que si E est un ensemble fini alors l'ensemble de ses parties a strictement plus d'éléments que E.

11/01. On explique pourquoi l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ de l'ensemble $E = \{1n..., n\}$ des n premiers entiers naturels non nuls est 2^n. Pour y arriver on introduit la notion d'indicatrice d'un sous-ensemble X de E qui permet de montrer que le nombre de sous-ensembles de E est égal au nombre d'applications de E dans $\{0,1\}$, puis on explique pourquoi ce nombre d'applications de E dans $\{0,1\}$ est égal à 2^n. On montrer que ce résultat permet de montrer que $2^n > n$ si n entier naturel.

Dans un deuxième temps on montre que si X est un ensemble quelconque, fini ou infini et si f est une application de X dans $\mathcal{P}(X)$ alors il existe un sous-ensemble Y de X qui n'est l'image par f d'aucun élément de E. Ceci établit que X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas le même cardinal.

Dans un troisième temps on introduit informellement les connecteurs logiques "et", "ou", "non", "implique", "est équivalent à " et on montre leur usage pour construire des "assertions" ou définir des ensembles.

La fin de la séance est consacrée à une introduction à la théorie des ensembles au cours de laquelle sont évoquées différentes notions comme élément, ensemble, sous-ensemble, appartenir, être inclus, complémentaire, union, intersection, différence, différence symétrique, le vide, l'ensemble des parties d'un ensemble donné.

18/01. On poursuit l'introduction à la théorie des ensembles. On fait observer que si l'intersection et la réunion sont commutatives ($X \cap Y = Y \cap X$ et $X \cup Y = Y \cup X$) ce n'est pas le cas de la différence et on démontre que si $X \setminus Y = Y \setminus X$ alors $X = Y$.

On explique les relations entre connecteurs logiques et ensembles.

On introduit ensuite la notion de table de vérité et ont fait avec du calcul propositionnel. Ceci permet de montrer que les connecteurs "et" et "non" permettent d'exprimer les autres connecteurs ("ou", "implique" et "est équivalent à ").

Les deux mutificateurs que sont le quantificateur universel ($\forall$) et le quantificateur existentiel ($\exists$) et sa variante traduisant l'existence et l'unicité $\exists !$) sont présentés.

L'utilisation des quantificateurs, des connecteurs et des symboles de la théorie des ensembles est illustrée par l'écriture mathématique de la définition pour une fonction numérique de la variable réelle d'être continue.

La notion d'application est introduite de deux façons, par la donnée de son graphe et par son action. On illustre graphiquement cette notion en expliquant comment de trois dessins donnés, on peut déduire que l'un représente le graphe d'une application et les deux autres pas.

25/01. La notion d'application est précisée et illustrée par l'introduction des définitions de image, antécédent, injection, surjection, bijection, composée, réciproque. On donne en particulier des écritures quantifiées des différents concepts.

Plusieurs exemples sont donnés : des graphes illustrant différentes situations, la valeur absolue (qui est définie), des applications associées aux expressions algébriques cos, x, x^2 et x^3, celles-ci permettent d'expliquer l'importance de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée.

C'est l'occasion de montre que 2 n'admet pas de racine cubique rationnelle. On rappelle quelques propriétés des fonctions sinus et cosinus.

On montre que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ peuvent vérifier $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g \neq Id_F$.

On finit la séance en analysant le sens de la définition quantifiée d'être continue pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathbf{R}\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)|.$$

01/02. On montre que la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui à x associe x^2 (le carré) est continue, c'est à dire vérifie

$$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathbf{R}\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)|$$

mais que la fonction de Dirac qui à 0 associe 1 et à x différent de 0 associe 0 n'est pas continue.

Ensuite on explique les notions de restriction et de prolongement.

Enfin on introduit la notion de partition qu'on illustre par des exemples.

08/02. Dans la première partie de la séance on donne une seconde preuve du fait que le nombre de parties (i.e. de sous-ensembles) d'un ensemble fini à n éléments est 2^n. La preuve proposée est une preuve combinatoire qui se fait par récurrence et qui n'utilise pas la fonction indicatrice comme c'était le cas de la première preuve donnée le 11 janvier.

Dans la seconde partie de la séance est traité un sujet de contrôle continu blanc (sujet 0.1 en ligne) directement inspiré du prochain contrôle continu.

01/03. On introduit la notion de famille indexée et la notion d'indice. On donne quelques exemples.

En particulier, en utilisant l'axiome du choix, on donne une partition de $\mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- la partition est indexée par des réels bien choisis (par le mathématiquement divin axiome du choix) et qui forment un ensemble I d'indices,

- l'ensemble $\mathbf{R}$ est la réunion des $F(i)$ avec $i \in I$,
- si $i, j \in I$ et $i \neq j$ alors $F(i) \cap F(j) = \emptyset$,
- si $i \in I$ alors $x \in \mathbf{R}$ appartient à $F(i)$ si et seulement si $x - i$ est rationnel.

Un autre exemple concret et remarquable qui est donnée est celui de la suite de Fibonacci définie par $u_0 = u_1 = 1$ et si $n \in \mathbf{N}$ $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. On explique comment montrer que les termes u_n de cette suite vérifient

$$u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On donne la définition géométrique du nombre d'Or, on montre qu'il est égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on explique sa relation avec la suite de Fibonacci.

Ensuite on introduit le symbole de sommation $\sum$. On prouve suivant la méthode de Gauss que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On montre aussi que si $r \in \mathbf{R}^*$ alors

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

08/03. On introduit les symboles $\prod$, $\bigcirc$, $\bigcup$ et on donne quelques illustrations.

Les notions d'associativité, de commutativité et de neutre sont évoquées et l'unicité du neutre lorsqu'il existe est prouvée.

On s'intéresse aux suites associées à des fonctions numériques, en particulier aux suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

On finit la séance en traitant l'exercice 1 (trois premières questions) et l'exercice 3 (trois premières questions) du recueil d'exercices.

15/03. On finit l'exercice inachevé la semaine dernière, l'exercice 3 (questions 4 et 5) du recueil d'exercices et on résout les exercices 11, 13, 18, 25, 27.

22/03. On résout les exercices 29, 31, 42, 43, 47 et 48 du recueil d'exercices. On profite de l'exercice 31 pour établir de montrer qu'un entier relatif qui n'est pas pair est de la forme $2k+1$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On donne une preuve qui utilise la division euclidienne et on prouve à cette occasion que si $(a,b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbf{Z} \times \{0,\ldots,b-1\}$ tel que $a = qb + r$. On donne aussi une preuve plus directe de l'équivalence entre être impair, c'est à dire ne pas être pair et être de la forme $2k+1$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Cette séance est l'occasion de pratiquer le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par contraposée et d'utiliser le fait que toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément.

En fin de séance a été suggérée la preuve suivante du fait que si un entier n est tel que n^2 est pair alors n est pair : *On écrit $n^2 = 2k$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On suppose n impair et on divise le tout par n. Puisque n est supposé impair, aucun de ses facteurs ne divise 2 et par conséquent n divise k. Il existe donc un entier l tel que $k = nl$. On a donc $n^2 = 2k = 2nl$. En divisant cette égalité par n on obtient que n est égal à $2l$ et donc que n, qui était supposé impair, est en fait pair. C'est une contradiction qui signifie que l'hypothèse n impair est erronée. L'entier n est donc pair.* Un point délicat dans cette démonstration se trouve dans l'affirmation "*Puisque n est supposé impair, aucun de ses facteurs ne* *divise* 2 *et par conséquent n divise k.*" Celle-ci est une conséquence du lemme de Gauss. Ce lemme est une conséquence de l'identité de Bézout et cette dernière est une conséquence de la division euclidienne.

29/03. On résout les exercices 56, 57, 58, 60, 61, 65 et 70 du recueil d'exercices.

05/04. On résout les exercices 74, 75, 81 question 1 et 82 du recueil d'exercices.

Au cours de cette ultime séance on traite des exercices susceptibles de tomber au prochain contrôle :

- on étudie deux applications f et g et leur composée $h = g \circ f$ et on étudie des propriétés d'injectivité et de surjectivité des unes et des autres ;

- on montre que si $n \in \mathbf{N}$ alors $(n+1)^2 = \sum_{i=0}^{n}(2i+1)$;

- on montre que si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $\dfrac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)}$;

- on montre que si $n \in \mathbf{N}$ et $n \geq 4$ alors $n! \geq 2^n$;

- on montre que si $n \in \mathbf{N}$ il existe un et un seul $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k$ ou $n = 2k+1$;

- on considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application et I un intervalle de $\mathbf{R}$ et on traduit sous forme quantifiée des affirmations et leurs négations comme "l'application f n'est pas de signe constant sur I", "l'application f est majorée" et "l'intervalle I est inclus dans $f(\mathbf{R})$;

- on montre que $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}}]0, \dfrac{1}{2^n}[= \mathbf{R}^{+*}$ et $\bigcap_{n \in \mathbf{Z}}]0, \dfrac{1}{2^n}[= \emptyset$;

- on montre que $J =]0,1[$ est tel que $f : \mathbf{R}^{+*} \to J$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ si $x \in \mathbf{R}^{+*}$ est une bijection et on montre que $g :]0,1[\to \mathbf{R}^{+*}$ définie par $g(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ est la réciproque de f ;

- on indique sans démonstration que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{N}$ et si $n \in \mathbf{N}$ $u_{n+1} = 2u_n - 1$ vérifie pour tout $n \in \mathbf{N}$ $u_n = 1 + 2^n(u_0 - 1)$;

- on signale que peuvent être cherchées toutes les partitions de $\{0,1,2,3,4,5\}$ formées de paires.