Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Exercices

Algèbre - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Version provisoire du 3 janvier 2023

Cette liste d'exercices est directement inspirée de celle incluse dans les notes du module MA2 du Deug MIAS première année en 2003-2004 et rédigées par les équipes pédagogiques de l'UFR Mathématiques. Seulement une petite partie de cette liste sera traitée durant le semestre.

1 Les nombres réels

Exercice 1

- Montrer que si un élément $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$.
- Montrer que dans $\mathbb{R}$ un carré est positif ou nul. (Écrire $x^2 = x \times x$ si $x \geq 0$ et $x^2 = (-x) \times (-x)$ si $x \leq 0$).
- Montrer qu'on ne peut pas définir d'ordre sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui en fasse un corps ordonné.

Exercice 2 La valeur absolue $|x|$ d'un élément x de $\mathbb{R}$ est définie par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. Essayer de démontrer les inégalités triangulaires :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|.$$

Discuter les cas d'égalité.

Exercice 3 On suppose que $|x-1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes :

$$1)\ x+y \qquad 2)\ x-y \qquad 3)\ xy \qquad 4)\ \frac{x}{y} \qquad 5)\ |x|-|y|.$$

Exercice 4 Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on dit que A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément s'il existe un élément appartenant à A qui majore (respectivement minore) A.

- Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ possède un plus grand (respectivement plus petit) élément, celui-ci est unique.
- Trouver des parties de $\mathbb{R}$ illustrant la définition de 'plus grand élément'.

Exercice 5 Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$, dire s'il a un plus grand élément, un plus petit élément, une borne inférieure, une borne supérieure :

$$1)\ \mathbb{N}\ , \qquad 2)\ [0,1[\ , \qquad 3)\ \{1+(1/n)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ n>0\}.$$

Exercice 6

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :
a) $(\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq x \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = 0$;
b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \Longrightarrow x = 0$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
a) $(\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq |x - y| \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = y$;
b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq |x - y| \leq \frac{1}{n}) \Longrightarrow x = y$.

Exercice 7 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

On raisonne par l'absurde en posant $(p/q)^2 = 2$ où p et q sont des entiers, et en comparant les puissances de 2 dans les diviseurs de p^2 et de $2q^2$.

Exercice 8 Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ ((n \geq N) \Longrightarrow (|a_n| < \varepsilon)).$$

Montrer, en utilisant la définition précédente, que les suites suivantes convergent vers 0
$a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = a^n$ (où $0 < a < 1$).

Exercice 9 Montrer, en utilisant la propriété de la borne supérieure, que tout nombre réel positif ou nul possède une racine carrée.

2 Logique

Exercice 10 Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient la prédicat :
$(\textit{non}\ (0 \leq x < 2))$.

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant le prédicat :
$((x^2 > 1 \ \textit{et} \ x < 2) \ \textit{ou} \ (x^2 \leq 9 \ \textit{et} \ x < 0))$.

Exercice 12 Prouver que le prédicat $(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})$ a la même table de vérité que le prédicat $((\textit{non}\,\mathbf{P}) \ \textit{ou} \ \mathbf{Q})$.

Exercice 13

• Soit x un réel. Considérons le prédicat $(x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4)$. Déterminer pour quels x le prédicat est vrai.

• Soit x un réel. Considérons le prédicat $(x = 2 \Longrightarrow 1 = 1)$. Déterminer pour quels x le prédicat est vrai

• Soit x un réel. Considérons le prédicat $(1 = 0 \Longrightarrow 2 = 3)$. Déterminer pour quels x le prédicat est vrai

Exercice 14 Écrire les implications suivantes en utilisant les symboles $\Longrightarrow, \geq, >, \neq$ et dire si elles sont vraies pour tous les réels x.

• Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit strictement supérieur à 2.

• Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit strictement supérieur à 2.

• Une condition nécessaire pour que x soit supérieur ou égal à 1, est que x et 1 soient différents.

• Si x est dans l'intervalle $[0, 1]$, alors $x^2 - 4x + 3$ est positif.

Exercice 15

• Soit x un réel. L'équivalence $(x^2 + |x| - 6 \leq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2)$ est-elle vraie ?

• Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs. Peut-on caractériser les éléments de E par l'un des prédicats suivants ?

- $x \in \mathbb{R}$ et $x/2 \in \mathbb{N}$.
- $x \in \mathbb{R}$ et $2x \in \mathbb{N}$.
- $x \in \mathbb{R}$ et x^2 est un entier pair.

Exercice 16

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Traduire avec des quantificateurs la propriété "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée".
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire par une phrase le prédicat suivant $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > A$.
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner un prédicat ne contenant plus le signe $\Longrightarrow$ équivalent au prédicat
$(\forall x \in \mathbb{R},\ ((x \geq 0 \ et \ x \leq 1) \Rightarrow f(x) = 1))$.

Exercice 17 Vérifier à l'aide d'une table de vérité que les prédicats suivants sont toujours vrais, quels que soient les prédicats $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$:

- $(non\,(non\,\mathbf{P})) \Longleftrightarrow \mathbf{P}$.
- $(non\,(\mathbf{P}\ et\ \mathbf{Q})) \Longleftrightarrow ((non\,\mathbf{P})\ ou\ (non\,\mathbf{Q}))$.
- $(non\,(\mathbf{P}\ ou\ \mathbf{Q})) \Longleftrightarrow ((non\,\mathbf{P})\ et\ (non\,\mathbf{Q}))$.
- $(non\,(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})) \Longleftrightarrow (\mathbf{P}\ et\ (non\,\mathbf{Q}))$.
- $(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}) \Longleftrightarrow ((non\,\mathbf{Q}) \Longrightarrow (non\,\mathbf{P}))$.

Exercice 18

- Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les prédicats suivants à l'aide de quantificateurs et donner leur négation.
  - L'application f n'est pas de signe constant sur I.
  - L'application f est majorée sur I.
  - L'intervalle I est inclus dans $]1,2[$.
- Écrire la négation du prédicat
$((x^2 \geq 1\ et\ x^3 < 2)\ ou\ (x^2 \leq 9\ et\ x < 0))$.

Exercice 19 Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes

- Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
- Si tout élément x d'un ensemble E est un élément de l'ensemble F, E est inclus dans F.

Exercice 20 Soient x et y deux réels, écrire la négation des prédicats suivants :

- $0 < x \leq 1$
- $xy = 0$
- $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Exercice 21 Soient E un ensemble et $\mathbf{P}(x)$ un prédicat qui contient une variable x, x désignant un élément de E. Écrire avec des quantificateurs un prédicat qui signifie "il y a au plus un x tel que $\mathbf{P}(x)$" et un prédicat qui signifie "il y a exactement deux x tels que $\mathbf{P}(x)$".

Exercice 22 Le prédicat suivant est-il vrai ? Écrire sa négation.

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \exists z \in \mathbb{Z},\ \exists u \in \mathbb{Z},\ \exists v \in \mathbb{Z},\ (x = zu\ et\ y = zv)$$

Exercice 23 Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les prédicats suivants sont-ils vrais ?

- $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0) \Longleftrightarrow \big[(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)\ ou\ (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)\big]$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) + g^2(x) = 0) \Leftrightarrow [(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)\ et\ (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)]$.

Exercice 24

- Indiquer si chacun des prédicats suivants est vrai lorsque $E = \mathbb{N}$.
- $\forall x \in E, \exists y \in E, y < x$
- $\exists y \in E, \forall x \in E, y < x$
- $\forall x \in E, \exists y \in E, y + x = 0$
- Même question si $E = \mathbb{Z}$.

Exercice 25 Pour tous réels x et y, on note $P(x, y)$ le prédicat $x + y^2 = 0$. Les prédicats suivants sont-ils vrais ?

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x, y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x, y)$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, P(x, y)$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$.

Exercice 26 Soit n un entier naturel. Montrer que si n est impair (respectivement pair), alors n^2 est impair (respectivement pair).

Exercice 27 Démontrer que pour tout réel x, on a $(x > 2 \Longrightarrow 2e^x + x^2 - 3x > 0)$.

Exercice 28 Montrer que pour tout réel x, $(\sqrt{x^2} = 2x + 3 \Longrightarrow x = -1)$.

Exercice 29 Montrer que tout entier multiple de 6 est multiple de 2.

Exercice 30 Soit f l'application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $x \geq 1$, par $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$. Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que f n'est pas dérivable au point 1 [ici on admet que la somme ou la différence de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point, que la composée de fonctions dérivables est dérivable, que $\sqrt{\ }$ est dérivable sauf en 0, que si $a \in \mathbf{R}$ alors l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe x+a est dérivable].

Exercice 31 Montrer que pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 32 Montrer que, pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Exercice 33 Soit $(x_n)_n$ la suite réelle définie par

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_0 + x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

pour tout entier $n \geq 0$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_n \leq 2^n$.

Exercice 34

- Montrer, par récurrence sur n, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.
- Démontrer la formule du binôme :
  pour tous les complexes a et b, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$ avec $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Exercice 35 L'exemple célèbre de syllogisme est “Tous les hommes sont mortels et Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel.”

Expliciter le syllogisme précédent à l'aide de quantificateurs.

Exercice 36 On demande de montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 3$, si n est premier, alors n est impair. On propose la démonstration suivante :

“Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

Démontrons que si n est pair, n n'est pas premier, ce qui est équivalent au résultat demandé.

Supposons n pair.
Alors n est divisible par 2 et comme on a $n \geq 3$, n n'est pas premier."

- Formalisez l'énoncé (en gardant les expressions "n premier" et "n impair").
- Quelles règles utilise-t-on dans chacun des trois premiers alineas ?
- Compléter la dernière ligne pour la rendre plus explicite.
- Quelles données y utilise-t-on ?
- Quelle conclusion peut-on tirer des alineas 3 et 4 ?

Exercice 37 On a demandé de montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x + 1/x) \geq 2)$. Pourquoi le raisonnement ci-dessous a-t-il valu la note zéro à son auteur ?

"Si $(x + 1/x) \geq 2$, on a $x^2 + 1 \geq 2x$, donc $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Or, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ qui est positif. On a bien le résultat demandé."

Pouvez-vous écrire une démonstration correcte ?

Exercice 38 Voici un énoncé : "Soit E un ensemble non vide et A, B et C trois sous-ensembles non vides de E. Montrer que : $A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C$".

On propose le texte incomplet suivant :

"............... $A\Delta B = A\Delta C$; Pour montrer que $B = C$, il ....de montrer que $B \subset C$ et $C \subset B$. .... $x \in B$. .... $x \in A$, ... $x \notin A$. .... x appartienne à A, ... $x \in A \cap B$, ... $x \notin A\Delta B$. .... $A\Delta B = A\Delta C$,............... $(A \setminus C) \subset A\Delta C$, ... $x \notin (A \setminus C)$ et .... $x \in A$, ... $x \in C$. .... x n'appartient pas à A, ... $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, ... $x \in A\Delta B = A\Delta C$. .... $x \notin A$; .... que $x \in C \setminus A$; .... encore $x \in C$. On a donc montré que .... Le problème étant symétrique en B et C, ... $C \subset B$. .... $B = C$."

- Compléter ce texte pour en faire une démonstration et séparer-le en paragraphes pour rendre sa structure plus claire :
- Les hypothèses "non vides" ont-elles servi ?

Exercice 39 On considère l'énoncé suivant : "l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle surjective ?" (pour la définition de "surjective" voir la section 5.5. du polycopié).

Trouver la faute dans le raisonnement suivant :

"Soit y un réel ; il y a deux cas : le cas $y \geq 0$ et le cas $y < 0$.

Lorsque $y \geq 0$, l'équation $y = x^2$ a deux solutions $x = \sqrt{y}$ et $x = -\sqrt{y}$; donc f est surjective.

Dans le cas où $y < 0$, l'équation $y = x^2$ n'a pas de solution ; donc f n'est pas surjective.

On conclut que f est surjective si $y \geq 0$ et f n'est pas surjective sinon."

Exercice 40 On propose le texte suivant :

"*Énoncé*

Soient $u = (a, b)$ et $u' = (a', b')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Les deux vecteurs u et u' sont proportionnels si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Démonstration

Dire que u et u' sont proportionnels est équivalent à dire qu'il existe un réel k tel que $u = k.u'$, c'est-à-dire ($a = ka'$ et $b = kb'$), ce qui se traduit par :

- si $a' \neq 0$, $k = \frac{a}{a'}$ donc $b = \frac{a}{a'}b'$ et $ab' - a'b = 0$.
- si $a' = 0$, alors $a = 0$ et donc aussi $ab' - a'b = 0$.

Finalement, on a bien l'équivalence annoncée. "

Cette "démonstration" n'en est pas une. Pourquoi ?

Exercice 41 Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Exercice 42 Soient a et b deux réels tels que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad a < b + \varepsilon)$.

Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, qu'alors $a \leq b$.

Exercice 43 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad (fg = 0 \Longrightarrow (f = 0 \, ou \, g = 0)) \quad ?$$

3 Ensembles

Exercice 44

- Montrer que si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$.
- Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Donner tous les sous-ensembles de E.
- Montrer, par récurrence sur n, qu'un ensemble à n éléments a 2^n sous-ensembles.
- Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer
  $(A \subset B$ si et seulement si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B))$.

Exercice 45

- Soient A, B, C, D des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$. Simplifier le résultat lorsque l'on a $A \subset C$.
- Soit E un ensemble qui est la réunion de deux sous-ensembles A et B. On suppose que A et B sont finis et ont respectivement n et m éléments. Si A et B sont disjoints, combien E a-t-il d'éléments ? Plus généralement, si $A \cap B$ a p éléments, montrer que E en a $n + m - p$.

Exercice 46

- Ne pas oublier les parenthèses. Trouver un exemple d'ensembles vérifiant

$$(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C).$$

- Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 1 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.

Montrer que les ensembles $A^c, B^c, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ et $A \Delta B$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles et préciser lesquels.

- Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $A = B$ 2) $A \setminus B = B \setminus A$ 3) $A \Delta B = \emptyset$

- Même question pour les six propriétés suivantes. (On peut montrer qu'elles sont toutes équivalentes à la première) :

1) $A \subset B$ 2) $B^c \subset A^c$ 3) $A \cap B = A$
4) $A \cup B = B$ 5) $A \setminus B = \emptyset$ 6) $A \Delta B = B \setminus A$

Exercice 47 Soient a, b et c des réels, avec $a \geq 0$. A quelle condition les sous-ensembles $]0, a[$, $]-\infty, b]$ et $[c, +\infty[$ forment-ils une partition de $\mathbb{R}$?

Exercice 48

- Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$.
- On considère les ensembles

$$\begin{aligned}
E &= \{1,2,3,4\},\\
A &= \{(i,j) \in E^2 \,|\, i < j\},\\
B &= \{(i,j) \in E^2 \,|\, i = j\},\\
C &= \{(i,j) \in E^2 \,|\, i > j\}.
\end{aligned}$$

Les représenter par un dessin, et montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice 49 Soient $E = \mathbb{C}, A = \{z \in E \mid |z| \leq 1\}$ et $B = \{z \in E \mid \Re(z) < 1\}$. Représenter $\complement_E A, \complement_E B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ et $A \Delta B$.

Exercice 50 Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple)

- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
- $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

Exercice 51 Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les égalités $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$ et $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Exercice 52 Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.

- Simplifier $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \cup (A \cup B)^c \cup C$.
- Simplifier $(A \setminus (B^c \cup C)) \cup A^c \cup B^c \cup C$.

Exercice 53 Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E.

- Montrer que l'on a $((A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c)$ et $((A \setminus B) \cup B = A \cup B)$.
- En déduire que l'on a $E = (C \setminus D) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup A^c \cup B^c \cup D$.

Exercice 54 Léon et Nicole travaillent dans un centre de lexicographie. Ils disposent de trois dictionnaires A, B et C. Leur patronne donne à Léon le travail suivant : former d'abord une liste des mots communs aux dictionnaires A et B, former ensuite une liste de mots communs aux dictionnaires B et C, enfin chercher les mots qui figurent dans l'une ou l'autre liste, mais pas dans les deux à la fois. Léon demande à Nicole de l'aider en dressant une liste des mots figurant dans le dictionnaire A ou dans le dictionnaire C, mais pas dans les deux à la fois. Ensuite Léon se charge de trouver les mots communs à cette liste et au dictionnaire B.

La patronne obtiendra-t-elle le résultat demandé ?

Exercice 55 Soient E et F deux ensembles, A et B deux sous-ensembles de E et C et D deux sous-ensembles de F. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ?

- $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
- $(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times C$.

Exercice 56 Soient E et F deux ensembles. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Exercice 57 On suppose que les sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 forment une partition de l'ensemble E. Combien y-a-t-il de façons de former une partition de E avec des sous-ensembles qui sont des réunions de certains des A_i ?

4 Applications

Exercice 58 Soient E et F deux ensembles finis non vides ayant respectivement n et m éléments. Montrer (par récurrence sur n par exemple) qu'il y a m^n applications de E dans F.

Exercice 59 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = 1$ pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2$ pour tout x tel que $x > 1$. Trouver deux prolongements distincts de f à $\mathbb{R}$. Quelle est la restriction de f à $[0, 1]$? Trouver une application g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f(x)$.

Exercice 60

- Soit $E = \{1, 2, 3\}$, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ les applications définies par $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$. Calculer $f \circ f$, $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?
- Dans le plan (affine euclidien orienté), on considère un (vrai) triangle OAB et f et g les symétries orthogonales par rapport à OA et OB respectivement. Calculer et comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 61

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [2^n, 2^{n+1}[$. Calculer la réunion $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Que peut-on dire de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- Calculer $\bigcup_{x\in]0,\,1/2[}\,]x-1,\, x+1[$ et $\bigcap_{x\in]0,\,1/2[}\,]x-1,\, x+1[$.

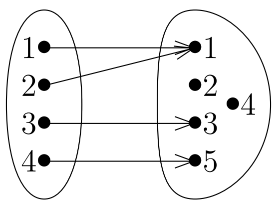
Exercice 62

- L'application f $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- Soient E et F deux ensembles finis ayant respectivement n et m éléments et f une application de E dans F. On suppose que f est injective ; comparer n et m. Même question lorsque f est surjective, lorsque f est bijective.

Exercice 63

- Montrer que l'application $\begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-1 \end{array}$ est bijective et déterminer h^{-1}.
- Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = 1$ si $x > 1/2$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Trouver une restriction de f qui soit injective. Est-elle bijective ? Trouver une bijection g d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ sur un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$. Déterminer g^{-1}.

Exercice 64 Considérons la figure



- Dans cet exemple, calculer $f^{-1}(\{1, 2, 5\})$ et $f(\{2, 3\})$.
- Soit $g : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array}$. Calculer $g^{-1}(\{-1, 1\})$, l'image de g et $g([0, 3\pi/2])$.
- Les applications f, g, h, k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $k(x) = |x|$ pour x réel sont-elles injectives, surjective, bijectives ? Pour chacune de ces applications donner son image, l'image réciproque de $\mathbb{R}_-$ et celle de $\{1\}$.

Exercice 65 Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même telles que pour tout x et tout y de E, on ait $h(x + y) = h(x) + h(y)$ si $x + y \in E$.

Exercice 66 On définit deux fonctions f et g sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ par

$$\begin{aligned} f(x) =& 1/2 - x \quad \text{si } x \in [0,1/2[\\ & 0 \quad \text{sinon} \\ g(x) =& 0 \text{ si } x \in [0,1/2[\\ & x - 1/2 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercice 67 Soient F un ensemble, E un sous-ensemble de F et f l'injection canonique de E dans F ($f(x) = x$ pour tout x de E). A quelle condition existe-t-il une application h de F dans E telle que $f \circ h = Id_F$?

Exercice 68 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [1/(n+1), 1/n[$. Calculer $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ et montrer que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une partition de E.

Exercice 69 Soient a et b deux nombres rationnels et f l'application de l'ensemble des nombres rationnels dans lui-même qui à chaque rationnel x associe $f(x) = a\,x + b$. Cette application est-elle injective, surjective ?

Exercice 70 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $f(x) = x/(1+|x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 71 Soit f l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & 1+z^2 \end{array}$

- Montrer que f est surjective.
- L'application f est-elle injective ?
- Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par l'application f.

Exercice 72 Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans lui-même définie par $f(x) = x^2 - x$.

- subsect Montrer que f n'est pas injective.
- Calculer les valeurs de $f(n)/2$ pour $n \in \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 6\}$. Que remarquez-vous ?
- Montrer que la restriction de f à $\mathbb{N}^*$ est injective.
- Soit h l'application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $h(x,y) = f(x) + f(y)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Montrer que l'image de h est un sous-ensemble de l'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs. L'application h est-elle surjective ?
- La restriction de h à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est-elle injective ?

Exercice 73 Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit injective, surjective, bijective. Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.

Exercice 74 Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

- Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.
- Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
- Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

5 Indices

Exercice 75 Démontrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$.

Exercice 76

- Montrer, par récurrence sur n, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.
- Démontrer la formule du binôme :

  pour tous les complexes a et b, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$ avec $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Exercice 77 Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ et $\displaystyle\sum_{i1}^{n}(i^2+2i+3)$.

Exercice 78 Montrer par récurrence que, pour tout entier n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 79 Pour tout entier naturel n on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$ et $A_n = (-1)^n S_n$.

1) Calculer A_0, A_1, A_2 et A_3.

2) Proposer une valeur pour A_n et prouver cette proposition par récurrence.

Exercice 80 Monter que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k+1}^{n}(n+k).$$

Exercice 81 Monter que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$,

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Exercice 82 Montrer que si $n \geq 4$ alors $2^n < n!$.