Pass options Maths et info
CMP1
05/04/2023

Exercice 74 Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1 • Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.

21✗ 2 • Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

3 • Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

1/ On suppose h injective. Pour montrer que f est injective il suffit de montrer que si $x, x' \in E$ et $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

On raisonne par contraposée en montrant que si f n'est pas injective alors h n'est pas injective.

On suppose donc f non injective. Il existe donc x et $x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$

On a alors
$$\begin{aligned} h(x) &= g \circ f(x) \\ &= g(f(x)) \\ &= g(f(x')) \\ &= g \circ f(x') \\ &= h(x') \end{aligned}$$

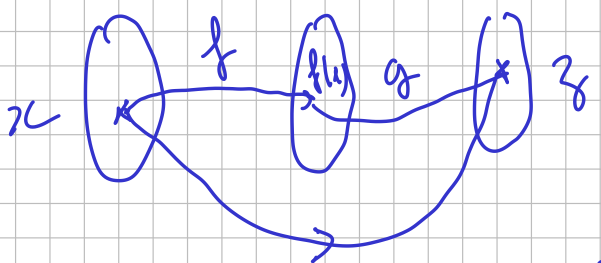
Ainsi on a l'existence de $x \neq x'$ et $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$. Par conséquent h n'est pas injective si f n'est pas injective.

On vient de prouver f non injective $\Rightarrow$ h non injective.
Par conséquent la contraposée est vraie
Si h est injective alors f est injective.

Montrons maintenant que si h est surjective alors g est surjective.
On veut alors montrer que si pour tout $z \in G$ il

existe $x \in E$ tel que $h(x) = z$" (surjectivité de h)
alors "pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$"

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$



$$z = h(x) = g\circ f(x) = g(f(x))$$

Soit donc $z \in G$. Puisque h surjective il existe $x \in E$ tel que $h(x) = z$.

Par définition de $h = g\circ f$ on a donc

$$z = h(x) = g\circ f(x) = g(f(x)).$$

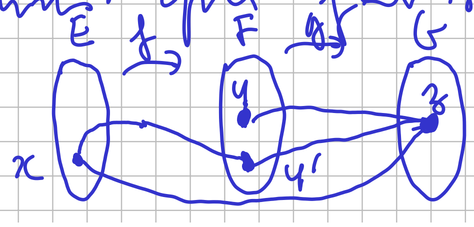
On pose $y = f(x)$. On a $y \in F$

et $g(y) = g(f(x)) = z$

Par conséquent il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Comme c'est vrai pour tout $z \in G$, ceci prouve que g est surjective si h est surjective.

ii) On suppose h surjective et g injective montrons que f est surjective.



Soit $y \in F$. On veut montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On prouvera la surjectivité de f.

On considère $z = g(y)$. Puisque $z \in G$ et que h est surjective il vient qu'il existe $x \in E$ tel que $h(x) = z$.

On a donc $z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Posons $y' = f(x)$.

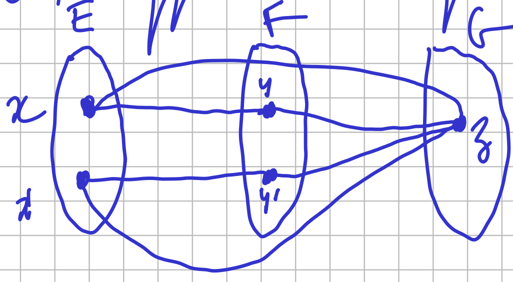
On a $g(y') = g(f(x)) = h(x) = z = g(y)$

Puisque g est injective $y' = y$.

Par conséquent $y = y' = f(x)$. Ceci prouve que si $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$

Ceci signifie que f est surjective si g est injective et h surjective.

3/ On suppose h injective et f surjective et on va montrer que ces hypothèses impliquent g injective.



Soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$ montrons que $y = y'$. Puisque f est surjective et que $y, y' \in F$ il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$

Par conséquent on a

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$
$$= g(f(x))$$
$$= g(y)$$
$$= z$$
$$= g(y')$$
$$= g(f(x'))$$
$$= (g \circ f)(x')$$
$$= h(x')$$

Puisque $h(x) = h(x')$ et que h est supposée injective on a $x = x'$ et donc $y = f(x) = f(x') = y'$ et ainsi $y = y'$.

Ceci montre que si $y, y' \in F$ et $g(y) = g(y')$ alors $y = y'$. Ceci signifie que g est injective si h injective et f surjective.

22 ✗ **Exercice 75** Démontrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$.

On établit ce résultat par récurrence sur n.

Si $n = 0$: Alors $(0+1)^2 = 1$ et $\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = 2 \times 0 + 1 = \underline{1}$

On a donc bien $\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (0+1)^2$.

La propriété est vraie au rang $n = 0$ et on a initialisé la récurrence.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie à ce rang n. Montrons que cette hypothèse implique qu'elle est vraie au rang $n+1$.

L'hypothèse est $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$

On a alors $\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) + (2(n+1)+1)$

résulte de la définition de $\sum$ $= (n+1)^2 + (2(n+1)+1)$

résulte de l'hyp de récurrence

Calculs élémentaires $= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1$

$= (n+1)^2 + 2(n+1).1 + 1^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = n+1$ et $b = 1$ $= ((n+1)+1)^2$

Finalement on a prouvé que

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) = ((n+1)+1)^2$$

et donc la propriété est vraie au rang $n+1$ si elle est supposée vraie au rang n.

Ceci prouve l'hérédité et achève la preuve par récurrence. On a bien que

si $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$.

23 ✗

Exercice 81 Monter que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

1) Par récurrence

$n=1$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

La propriété est vraie au rang 1. (initialisation)

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)}$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$

et la propriété est vraie au rang $n+1$ si elle est vraie au rang n.
Ceci prouve l'hérédité et achève la preuve du résultat voulu : si $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Autre preuve (exquise)

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

donc

$$\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

24X **Exercice 82** Montrer que si $n \geq 4$ alors $2^n < n!$.

Preuve par récurrence sur $n \geq 4$.

Initialisation : On a $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

On a bien $24 \geq 16$ et donc $4! \geq 2^4$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 4$.

On suppose $n! \geqslant 2^n$. Montrons qu'alors
on a $(n+1)! \geqslant 2^{n+1}$.

On a $n \geqslant 4$ donc $(n+1) \geqslant 5 \geqslant 2$

Par conséquent $(n+1)! = n! \times (n+1)$

Par hypothèse. $\longrightarrow$ $\geqslant 2^n \times (n+1)$

Car $n+1 \geqslant 2$ $\longrightarrow$ $\geqslant 2^n \times 2$

$\geqslant 2^{n+1}$

Ainsi si $n \geqslant 4$ et $n! \geqslant 2^n$ alors
$n+1 \geqslant 4$ et $(n+1)! \geqslant 2^{n+1}$

La propriété est donc héréditaire. Puisqu'elle est vraie au rang 4, elle est vraie pour tout rang $n \geqslant 4$.

Ainsi si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 4$ $n! \geqslant 2^n$.

Quelques exos en vue du contrôle

1/ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si $n \in \mathbb{N}$ il existe un et un seul $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que soit $n = 2k$ soit $n = 2k+1$.

<u>Initialisation</u> : On a $0 = 2.0$

$1 = 2.0 + 1 > 0$

et si $k \in \mathbb{N}^*$ $2k = k + k$

$> k > 0$ car $k \geqslant 1$

et $2k+1 > 2k > 0$

Ainsi seul $k=0$ vérifie $0 = 2k$

et aucun k ne vérifie $0 = 2k+1$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose qu'il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que soit $n = 2k$ soit $n = 2k+1$.

<u>1er cas</u> $n = 2k$.

On a alors $n+1 = 2k+1$

- soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2l+1$

  on a donc $n = 2l$ et donc $l = k$

- soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2l$

  On a donc $n = 2(l-1)+1$

  Mais ceci n'est pas possible par hypothèse de récurrence.

Ainsi $n+1$ vérifie la condition

<u>2e cas</u> $n = 2k+1$

Alors $n+1 = 2k+1+1 = 2(k+1)$.

- si $l \in \mathbb{N}$ vérifie $n+1 = 2l$
  on a alors $n = 2(l-1)+1 = 2k+1$ et donc $l = k+1$
- si $l \in \mathbb{N}$ vérifie $n+1 = 2l$ alors
  $n = 2(l-1)+1$ et ceci n'est pas possible par hypothèse de récurrence

Ceci prouve que si la propriété est vraie au rang n elle l'est au rang $n+1$.
Elle est donc vraie au rang 0 et héréditaire. Elle est donc toujours vraie.

2/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et I intervalle

- "f perd signe constant sur I" s'écrit
  "$\exists x \in I, \exists x' \in I \quad f(x) < 0 < f(x')$"
  La négation est "f est de signe constant sur I" et s'écrit.
  "$(\forall x \in I \; f(x) \geq 0)$ ou $(\forall x \in I \; f(x) \leq 0)$"
  ou encore
  "$\forall x \in I \; \forall x' \in I \quad f(x) f(x') \geq 0$"
  ou encore

$$\boxed{\text{"} \exists x \in I \; \forall x' \in I \quad f(x) f(x') \geq 0 \text{"}}$$

Cette dernière affirmation ne traduit le faut que f est de signe constant sur I. Par exemple si on prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, $I = \mathbb{R}$

On a bien $\exists x \in I\ \forall x' \in I\quad f(x)f(x') \geq 0$
mais f n'est pas de signe constant puisque $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$.

- "l'application f est majorée" se traduit par
"$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) \leq M$"

La négation est "l'application f n'est pas majorée" se traduit
"$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\quad f(x) > M$"

- "l'intervalle I est inclus dans $f(\mathbb{R})$" se traduit par
"$\forall y \in I\ \exists x \in \mathbb{R}\quad f(x) = y$"
ou encore
"$I \subset f(\mathbb{R})$"

La négation est "l'intervalle I n'est pas inclus dans $f(\mathbb{R})$" qui se traduit par
"$\exists y \in I\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) \neq y$"
ou encore
"$I \not\subset f(\mathbb{R})$"

4/ Soit $I_n =]0, 2^n[$ si $n \in \mathbb{Z}$

Montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n = \mathbb{R}^{+*}$

si $n \in \mathbb{Z}$ $I_n \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \subset \mathbb{R}^{+*}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

On pose $n = \text{Partie entière}\left(\frac{\ln(x)}{\ln 2}\right) + 1$

on a $2^n = e^{\left[\text{Partie entière}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right) + 1\right] \ln(2)}$

$> e^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \ln(2)} = e^{\ln(x)} = x$

Par conséquent $x \in]0, 2^n[= I_n$

et donc $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$!

Ceci prouve que $\mathbb{R}^{+*} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$

Par double inclusion on a prouvé

$$\mathbb{R}^{+*} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n.$$

- Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} I_n = \emptyset$.

On observe que si $n \leq m$

alors $I_n \subset I_m$

Donc $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) \subset I_m$ quelque

soit $m \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Alors $\frac{1}{x} > 0$

On pose $n = \text{Partie entière} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\ln(2)} + 1$

$0 < \frac{1}{x} < 2^n$ (cf calcul précédent)

donc $0 < \frac{1}{2^n} < x$

On pose $m = -n$

On a $0 < 2^m < x$

et donc $x \notin I_m$

Or $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} I_n \subset I_m$ Donc $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} I_n$.

Ainsi quelque soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} I_n$.

On les $I_n \subset \mathbb{R}^{+*}$ Donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} I_n \subset \mathbb{R}^{+*} \text{ mais}$$

si $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} I_n$. Ainsi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} I_n = \emptyset.$$

5/ On prend $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

Il s'agit de montrer que $f(\mathbb{R}^{+*}) =]0,1[$
et si $y \in]0,1[$ alors

$$g(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \text{ est l'unique } x \in \mathbb{R}^{+*}$$

telque $f(x) = y$.

si $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $0 < x^2 < 1+x^2$ Donc

$$0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1 \quad \text{donc } f(\mathbb{R}^{+*}) \subset]0,1[$$

Soit $y \in]0,1[$ On cherche $x \in]0,1[$
telque $f(x) = y$.

On a donc $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

Ceci revient à résoudre les eq équivalentes suivantes

$$(1+x^2)y = x^2$$

possible car $y \in]0,1[$ $\Leftrightarrow$

$$y = x^2(1-y)$$

$$\frac{y}{1-y} = x^2$$

possible car $\frac{y}{1-y} \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{y}{1-y}} = x$$

et on cherche $x \in \mathbb{R}^{+*}$

6/ Montrer par récurrence sur n que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ vérifie

$$u_n = 1 + 2^n(u_0 - 1).$$

7/ Partitions de $\{0, \dots, 5\}$ en paires