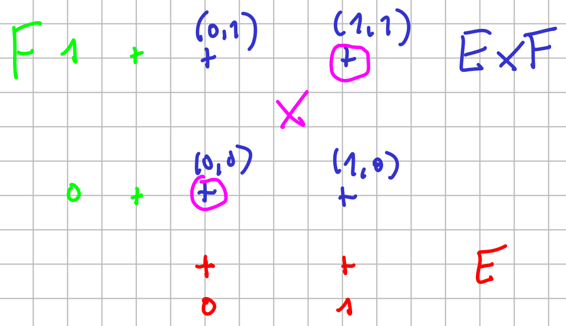
Pass options Maths et info
CMP1
29/03/2023

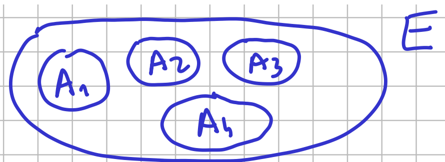
14 X **Exercice 56** Soient E et F deux ensembles. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Non. Si $E = \{0,1\}$, $F = \{0,1\}$ et $X = \{(0,0),(1,1)\}$ alors il n'existe pas $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $X = A \times B$



En effet sinon, puisque $(1,1) \in X$ alors $(1,1) \in A \times B$ donc $1 \in A$ et $1 \in B$ et de même, puisque $(0,0) \in X$ alors $(0,0) \in A \times B$ et donc $0 \in A$ et $0 \in B$. Par conséquent A et B seraient égaux à $\{0,1\}$ donc à E et F et alors on aurait $X = A \times B = E \times F$. Ceci faux puisque $(0,1) \in (E \times F) \setminus X$ et $(1,0) \in (E \times F) \setminus X$.

15 X **Exercice 57** On suppose que les sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 forment une partition de l'ensemble E. Combien y-a-t-il de façons de former une partition de E avec des sous-ensembles qui sont des réunions de certains des A_i ?



A_1, A_2, A_3, A_4 sont non vides
$A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$
$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \phi$

Partition en 4 sous ensembles

1 • A_1, A_2, A_3, A_4

Partition en 3 sous ensembles

3 • $A_1 \cup A_2, A_3, A_4$ • $A_1 \cup A_4, A_2, A_3$ • $A_1 \cup A_3, A_2, A_4$

3 • $A_1, A_2 \cup A_3, A_4$ • $A_1, A_2 \cup A_4, A_3$ • $A_1, A_2, A_3 \cup A_4$.

Partition en 2 sous ensembles

3 • $A_1 \cup A_2, A_3 \cup A_4$ • $A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_4$ • $A_1 \cup A_4, A_2 \cup A_3$

4 • $A_1, A_2 \cup A_3 \cup A_4$ • $A_2, A_1 \cup A_3 \cup A_4$ • $A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3$ • $A_4, A_1 \cup A_1 \cup A_3$

Partition en 1 sous ensemble

1 • $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$

On trouve Quinze partitions de E formées à partir de A_1, A_2, A_3 et A_4.

16 ×

Exercice 58 Soient E et F deux ensembles finis non vides ayant respectivement n et m éléments. Montrer (par récurrence sur n par exemple) qu'il y a m^n applications de E dans F.

On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n suivante : " Si E de cardinal n et F de cardinal $m \in \mathbb{N}$ alors le nombre d'applications de E ds F est m^n "

Vérification au rang 0. Dans ce cas $E = \emptyset$. Il existe une unique application de $E = \emptyset$ dans F c'est l'application dont le graphe est le vide. On a donc bien que le nombre d'applications de $E = \emptyset$ dans F vaut $1 = m^0$. Ainsi P_0 vraie

Vérification au rang 1. Dans ce cas $E = \{a\}$ et une application f de E dans F consiste simplement à choisir un élément $f(a)$ ds F et il y a m choix. On a donc $m = m^1$ applications de E ds F et P_1 est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ (ou n^* si on commence la récurrence à $n=1$) fixé. On suppose P_n vraie.

Soit E de cardinal $n+1$. Alors E est de la forme

$E = E' \cup \{a\}$ avec $a \notin E'$ et Cardinal de $E' = n$.

Soit F de cardinal m.

• Soit $f : E \longrightarrow F$. On pose $f' : E' \longrightarrow F$ définie par $f'(x) = f(x)$ si $x \in E'$

On observe que si $g : E \to F$ alors

$f' = g'$ si et seulement si

$f(x) = g(x)$ si $x \in E \setminus \{a\} = E'$.

et donc $f=g$ si et seulement $f'=g'$ et $f(a)=g(a)$.

- Inversement si $\varphi : E' \to F$ il existe exactement m applications $f_1, \dots, f_m$ telles que
$f'_1 = f'_2 = \dots = f'_m = \varphi$

Si $F = \{b_1, \dots, b_m\}$ on pose $f_1(a) = b_1, \dots, f_m(a) = b_m$.

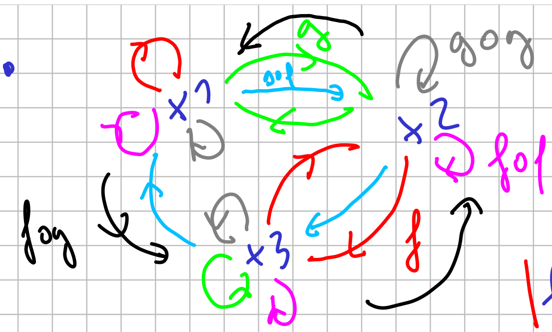
Ainsi il y a m fois plus d'applications de E dans F que de E' dans F.
Par hypothèse de récurrence, puisque Card $E' = n$ il existe m^n applications de E' dans F et donc $m^n \times m$ applications de E dans F c'est-à-dire m^{n+1} applications de E dans F.

Exercice 60

17 ✗

- Soit $E = \{1,2,3\}$, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ les applications définies par $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$. Calculer $f \circ f$, $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?
- Dans le plan (affine euclidien orienté), on considère un (vrai) triangle OAB et f et g les symétries orthogonales par rapport à OA et OB respectivement. Calculer et comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

•



$f\circ f(1) = f(f(1)) = f(1) = 1$

$f\circ f(2) = f(f(2)) = f(3) = 2$

$f\circ f(3) = f(f(3)) = f(2) = 3$

$g\circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 2$

$f\circ g(1) = f(g(1)) = f(2) = 3$

$f\circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 1$

$f\circ g(3) = f(g(3)) = f(3) = 2$

$g\circ f(2) = g(f(2)) = g(3) = 3$

$g\circ f(3) = g(f(3)) = g(2) = 1$

$g\circ f \neq f\circ g$ on a même $(g\circ f) = (f\circ g)^{-1}$

en effet $(g\circ f)\circ(f\circ g) = g\circ(f\circ f)\circ g$

$= g\circ Id \circ g$

$= g\circ g$

$= Id$

On peut le voir aussi en écrivant

$(g\circ f)\circ(f\circ g)(1) = (g\circ f)(f\circ g(1)) = (g\circ f)(3) = 1$

$(g\circ f)\circ(f\circ g)(2) = (g\circ f)(f\circ g(2)) = (g\circ f)(1) = 2$

$(g\circ f)\circ(f\circ g)(3) = (g\circ f)(f\circ g(3)) = (g\circ f)(2) = 3$

Exercice 61

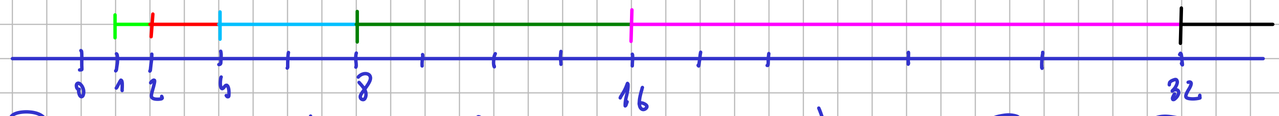
18 ✗

1 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [2^n, 2^{n+1}[$. Calculer la réunion $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Que peut-on dire de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2 • Calculer $\bigcup_{x\in]0,\,1/2[}]x-1,\, x+1[$ et $\bigcap_{x\in]0,\,1/2[}]x-1,\, x+1[$.

1. $A_0 = [2^0, 2^1[= [1,2[$ $A_1 = [2^1, 2^2[= [2,4[$ ...

$A_{10} = [2^{10}, 2^{11}[= [1024, 2048[$.



Prouvons que les A_n forment une partition de $[1,+\infty[$.
Soit $x \in [1,+\infty[$ montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ unique tel que $x \in A_n = [2^n, 2^{n+1}[$.

Soit $n = \text{Partie entière}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)$

$x \geq 1$ donc $\ln(x) \geq 0$ donc $n \geq 0$

$n \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < n+1$

donc $2^n \leq 2^{\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)} = \exp\left(\ln(2)\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right) = \exp(\ln(x)) = x < 2^{n+1}$.

Par conséquent $x \in [2^n, 2^{n+1}[= A_n$

Si $n_1 < n < n_2$ alors

$$2^{n_1+1} \leq 2^n < 2^{n+1} \leq 2^{n_2}$$

Par conséquent $A_{n_1} = [2^{n_1}, 2^{n_1+1}[$ et $A_n = [2^n, 2^{n+1}[$ sont disjoints

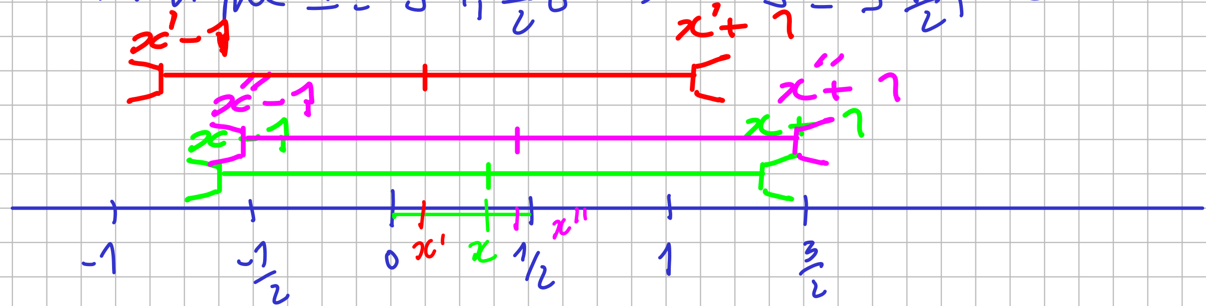
$A_{n_2} = [2^{n_2}, 2^{n_2+1}[$ et $A_n = [2^n, 2^{n+1}[$ sont aussi disjoints.

L'ensemble A_n est le seul qui contienne x.

Ainsi les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une partition de $[1, +\infty[$.

2. On étudie $I = \bigcup_{x \in]0, \frac{1}{2}[}]x-1, x+1[$ et $\bigcap_{x \in]0, \frac{1}{2}[}]x-1, x+1[= J$

Montrons que $I =]-1, \frac{3}{2}[$ et $J =]-\frac{1}{2}, 1[$



Soit $y \in]-1, -\frac{1}{2}[$ alors $y+1 \in]0, \frac{1}{2}[$ on pose $x = \frac{1}{2}(y+1)$

alors $y \in]x-1, x+1[$ et $x \in]0, \frac{1}{2}[$

Soit $y \in [-\frac{1}{2}, 0[$ alors $y+1 \in [\frac{1}{2}, 1[$ et donc $x = \frac{1}{2}(y+1)$

vérifie $y \in]x-1, x+1[$ et $x \in]0, \frac{1}{2}[$

Soit $y = 0$ alors $0 \in]\frac{1}{4}-1, \frac{1}{4}+1[$ et $\frac{1}{4} \in]0, \frac{1}{2}[$

Soit $y \in]0, \frac{1}{2}[$ alors $y \in]y-1, y+1[$

On vient de prouver que si $y \in]-1, \frac{1}{2}[$ alors $y \in I$.

De façon analogue on montre que si $y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ alors $y \in I$.

Si $y > \frac{3}{2}$ alors $y - 1 > \frac{1}{2}$ donc il n'y a pas de $x \in]0, \frac{1}{2}[$

tel que $y \in]x-1, x+1[$ et donc $y \notin I$.

. Si $y < -1$ alors $y+1 < 0$ donc il n'y a pas de $x \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $y \in]x-1, x+1[$ et donc $y \notin I$.

L'étude de J se fait de façon semblable.

19 X **Exercice 65** Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même telles que pour tout x et tout y de E, on ait $h(x + y) = h(x) + h(y)$ si $x + y \in E$.

. $h \equiv 0$ convient

. $h = id$ convient

Ce sont les seules.

. Si $h(1) = 1$ alors $h(2) = h(1+1) = h(1) + h(1) = 1+1 = 2$
$h(3) = h(1+2) = h(1) + h(2) = 1+2 = 3$
$h(4) = h(1+3) = h(1) + h(3) = 1+3 = 4$
et donc $h \equiv id$.

. Si $h(1) = 0$ alors $h(2) = h(1+1) = h(1) + h(1) = 0+0 = 0$
$h(3) = h(1+2) = h(1) + h(2) = 0+0 = 0$
$h(4) = h(1+3) = h(1) + h(3) = 0+0 = 0$
et donc $h \equiv 0$.

. Si $h(1) \geq 2$ donc $h(2) = h(1+1) = h(1) + h(1) \geq 4$
$h(3) = h(1+2) = h(1) + h(2) \geq 6$ Ceci n'est pas possible
Donc $h(1) < 2$.

20 X **Exercice 70** Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ définie par $f(x) = x/(1 + |x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

L'application est bien définie car $x, |x|$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $|x| \geq 0$ donc $1 + |x| > 0$ donc $x / 1+|x|$ $f(x)$ est toujours définie sur $\mathbb{R}$.

Prouvons que $f(x) \in]-1, 1[$.

car $|x| < 1 + |x|$ donc $\left|\frac{x}{1+|x|}\right| = |f(x)| < 1$

et donc $f(x) \in]-1, 1[$

Pour prouver que c'est une bijection on considère $y \in]-1,1[$ et on va montrer qu'il existe un et un seul $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

On veut résoudre $y = \frac{x}{1+|x|}$ (E_0) qui est équivalente aux équations suivantes

$$(1+|x|)y = x \quad (E_1)$$

$$(1+x)y = x \text{ et } x \geq 0 \quad \text{ou} \quad (1-x)y = x \text{ et } x < 0 \quad (E_2)$$

$$y = x(1-y) \text{ et } x \geq 0 \quad \text{ou} \quad y = x(1+y) \text{ et } x < 0 \quad (E_3)$$

(on peut diviser par $1-y$ et $1+y$ car $y \in]-1,1[$)

$$\frac{y}{\underbrace{1-y}_{>0 \text{ car } y \in]-1,1[}} = x \text{ et } x \geq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\underbrace{1+y}_{>0 \text{ car } y \in]-1,1[}} = x \text{ et } x < 0 \quad (E_4)$$

$$y \geq 0 \text{ et } \frac{y}{1-y} = x \geq 0 \quad \text{ou} \quad y < 0 \text{ et } \frac{y}{1+y} = x < 0 \quad (E_5)$$

$\rightarrow$ x et y ont de même signe car puisque $y \in]-1,1[$ $1-y$ et $1+y \in]0,2[$.

On a prouvé que si $y \in]-1,1[$ il admet un et un seul antécédent

- $x = \frac{y}{1-y}$ si $y \geq 0$
- $x = \frac{y}{1+y}$ si $y < 0$

Ainsi $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est bien une bijection.