Pass options Maths et info
CMP1
22/03/2023

8 **Exercice 29** Montrer que tout entier multiple de 6 est multiple de 2.

Un multiple de 6 est un entier relatif de la forme $6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Un multiple de 2 est un entier relatif de la forme $2l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose n multiple de 6. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k$. On a donc, puisque $6 = 2\times 3$

$$n = (2\times 3)\times k = 2\times(3\times k)$$ associativité de la multiplication.

et donc si on pose $l = 3k$ on a $l \in \mathbb{Z}$ et $n = 2l$.
Ainsi n est bien un multiple de 2.

9 **Exercice 31** Montrer que pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

Un entier est pair si il est de la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ce qui ne marche pas : si n pair alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $n^2 = 2(2k^2) = 2l$ avec $l = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ donc n^2 pair. Ceci montre que n pair $\Rightarrow$ n^2 pair et ce qu'on veut montrer c'est n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

Ce qu'il est possible de faire c'est d'essayer de raisonner par contraposée. C'est-à-dire de montrer que si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas impair (Négation de n pair $\Rightarrow$ Négation de n impair)

On dire que n n'est pas pair c'est dire que n est impair c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.

On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k)\times 1 + 1^2$
$= 2k^2 + 4k + 1$
$= 2(k^2+2k) + 1$
$= 2\ell + 1$ avec $\ell = k^2+2k \in \mathbb{Z}$

Ainsi n^2 est alors impair si n impair.
Donc on vient de prouver que n impair $\Rightarrow n^2$ impair et par conséquent la contraposée est vraie c'est à dire n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

Expliquons pourquoi si $n \in \mathbb{Z}$ n'est pas pair il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.
C'est un argument de <u>division euclidienne</u>. De façon générale, si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ vérifiant
- $a = qb + r$
- $r \in \{0, \dots, b-1\}$

On dit que q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

<u>preuve</u> • 1er cas $a \in \mathbb{N}$.
On considère $E = \{k \in \mathbb{N} \mid kb \leq a\}$
L'ensemble E est non vide car $0 \in E$.
De plus $E \subset \mathbb{N}$.
Enfin E est majoré. Prenons $k_0 = a+1$
On a $k_0 b = (a+1)b = ab + b$
puisque $b \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 1$ et donc $ab \geq a$ (car $a \geq 0$) et $b > 0$

Ainsi $k_0 b = ab + b \geq a + b > a$
le nombre $k_0 \notin E$. De plus si $k \geq k_0$ alors $a < k_0 b \leq kb$ et donc $k \notin E$.

Puisque $E \subset \mathbb{N}$, qu'il est non vide, et qu'il est majoré par k_0 [car si $k \in E$ $k \leq k_0$ et si $k > k_0$ alors $k \notin E$] il existe un plus grand élément de E, noté $\tilde{q}$: $\tilde{q} \in E$, c'est-à-dire $\tilde{q} b \leq a$. et si $k > \tilde{q}$ alors $k \notin E$ et donc $kb > a$

On a $\tilde{q} b \leq a < (\tilde{q}+1) b$

- si $\tilde{q} b = a$ on pose $q = \tilde{q}$ et $r = 0$
  on a bien $a = qb + r$ avec $r \in \{0, \dots, b-1\}$

- si $\tilde{q} b < a$ alors on pose
  $q = \tilde{q}+1$ et $r = (\tilde{q}+1)b - a \neq 0$
  et on a alors $r \in \{0, \dots, b-1\}$.

On a trouvé un couple (q, r) qui vérifie la division euclidienne de a par b $\begin{cases} a = qb + r \\ r \in \{0, \dots, b-1\} \end{cases}$

Soit (q', r') un couple vérifiant $\begin{cases} a = q'b + r' \\ r' \in \{0, \dots, b-1\} \end{cases}$

On a donc $qb + r = a = q'b + r'$
et donc $|q - q'| b = |r - r'|$
mais $|r - r'| \leq b - 1$ et si $|q - q'| \neq 0$,
alors $|q - q'| b \geq b$ car $b \in \mathbb{N}^*$
Et donc si $|q - q'| \neq 0$ on a
$|r - r'| \leq b - 1 < b \leq |q - q'| b = |r - r'|$

On obtient $|r-r'| < |r-r'|$

Ceci n'est pas possible. C'est donc que l'hypothèse $|q-q'| \neq 0$ est fausse. Ainsi $|q-q'| = 0$ et donc $q = q'$

et donc $|r-r'| = |q-q'|b = 0 \cdot b = 0$

et donc $|r-r'| = 0$ et $r = r'$

Finalement on a bien unicité du couple (q,r) de la division euclidienne.

[Dans le cas de la parité on applique ce résultat avec $b=2$ et on prouve ainsi que si $n \in \mathbb{Z}$ alors $n = 2k$ ou $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$]

2e cas $a \leq 0$ On considère

$$A = a + |a|b \qquad A \geq 0$$

On fait la division euclidienne de A par b on trouve $(\tilde{q}, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, \dots, b-1\}$ tels que $A = \tilde{q} b + r$

Donc $a + |a|b = \tilde{q} b + r$

donc $a = (\tilde{q} - |a|) b + r$

On pose $q = (\tilde{q} - |a|)$ et on a donc que (q,r) vérifie $a = qb + r$ et $r \in \{0, \dots, b-1\}$

Ceci prouve l'existence de (q,r) pour $a \leq 0$

l'unicité se prouve de la même façon que si $a \geq 0$.

Preuve directe de la dichotomie si $n \in \mathbb{Z}$ alors soit $n = 2k$ soit $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On le fait pour $n \in \mathbb{N}$

Soit k le plus grand entier tel que $2k \leq n$.
Cet entier existe car $E = \{k \mid 2k \leq n\}$ est non vide ($0 \in E$), est inclus dans $\mathbb{N}$, et est majoré (si $k > n$ alors on a $2k > 2n \geq n$)

Puisque k est le plus grand élément de E, $k+1 \notin E$ donc on a $2k \leq n < 2(k+1)$.
Ainsi $n \in \{2k, 2k+1\}$

Donc n est de la forme $2k$ (n pair) ou n est de la forme $2k+1$ et pas de la forme $2k$ (n n'est pas paire, donc impair).

10 ×

Exercice 42 Soient a et b deux réels tels que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad a < b + \varepsilon)$.
Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, qu'alors $a \leq b$.

On veut montrer que l'assertion suivante est vraie

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ a < b+\varepsilon) \Rightarrow (a \leq b).$$

On nous propose de raisonner par l'absurde.
Allons-y. On suppose donc

(1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ a < b+\varepsilon$

et

(2) $a > b$

négation

et recherchons une contradiction

On pose $\varepsilon = a-b$. Puisque $a>b$ on a
$\varepsilon = a-b>0$. (2)

Donc d'après (1), puisque $\varepsilon = a-b>0$ on a
$a < b+\varepsilon = b+(a-b) = a$
et donc $a<a$.

Ce qui est la contradiction recherchée.

Par conséquent il est impossible que
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, a<b+\varepsilon)$ et $(a>b)$
et donc $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ a<b+\varepsilon) \Rightarrow (a \leq b)$
est vraie.

Exercice 43 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on :

11 ×

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad (fg = 0 \Longrightarrow (f = 0 \, ou \, g = 0)) \quad ?$$

Nous considérons
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \neq 0 \mapsto 1 = f(x)$
$x = 0 \mapsto 0 = f(0)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \neq 0 \mapsto 0 = g(x)$
$x = 0 \mapsto 1 = g(0)$

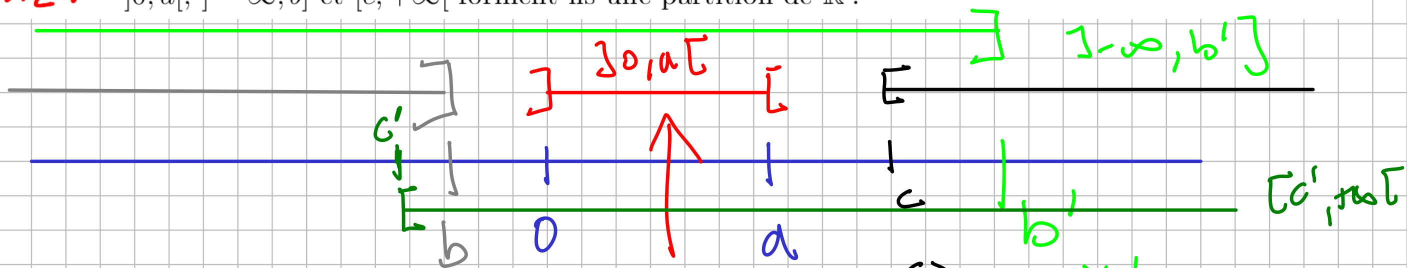
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x=0$ $g(x)=0$ et donc
$fg(x) = f(x).g(x)$
$= f(x).0$
$= 0$

. si $x \neq 0$ $f(x)=0$ et donc

$fg(1) = f(1) . g(1)$
$= 0 . g(1)$
$= 0$

Ainsi $fg \equiv 0$ Mais $f \not\equiv 0$ car $f(1) = 1 \neq 0$
et $g \not\equiv 0$ car $g(0) = 1 \neq 0$

12 X **Exercice 47** Soient a, b et c des réels, avec $a \geq 0$. A quelle condition les sous-ensembles $]0, a[$, $]-\infty, b]$ et $[c, +\infty[$ forment-ils une partition de $\mathbb{R}$?



$b \leq 0$

$c \geq a$

est non vide
est non vide si $a > 0$

si $b' > 0$
$]-\infty, b']$ et
$]0, a[$ ne
chevauchent
impossible

Si $c' \leq 0$ $[c', +\infty[$ et $]0, a[$
se chevauchent impossible

On a donc $b \leq 0 < a \leq c$.

Mais si $b < 0$ tout $x \in]b, 0]$ n'est pas
dans $]-\infty, b] \cup]0, a[\cup [c, +\infty[$ $\neq \emptyset$

et si $c > a$ tout $x \in [a, c[$ n'est pas $\neq \emptyset$
dans $]-\infty, b] \cup]0, a[\cup [c, +\infty[$

Donc pour avoir une partition nécessairement
$b = 0$ et $c = a > 0$ et on a bien
$\mathbb{R} =]-\infty, 0] \cup]0, a[\cup [a, +\infty[$ et les trois

intervalles sont deux à deux disjoints et non vides donc forment une partition de $\mathbb{R}$.

Exercice 48

13 ×

1/ • Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$.

2/ • On considère les ensembles

$$E = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$A = \{(i, j) \in E^2 \mid i < j\},$$
$$B = \{(i, j) \in E^2 \mid i = j\},$$
$$C = \{(i, j) \in E^2 \mid i > j\}.$$

Les représenter par un dessin, et montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

1/ $A = B = \{1,2\}$ $\quad A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Les sous ensembles de $A\times B$ sont au nombre de $16 = 2^4$

Ce sont $\emptyset$, $A \times B$

$\{(1,1)\}$, $\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$\{(1,2)\}$, $\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$

$\{(2,1)\}$, $\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

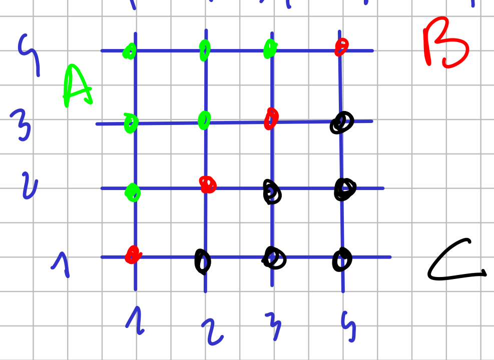
$\{(2,2)\}$, $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.

$\{(1,1),(1,2)\}$, $\{(2,1),(2,2)\}$

$\{(1,1),(2,1)\}$, $\{(1,2),(2,2)\}$

$\{(1,1),(2,2)\}$, $\{(1,2),(2,1)\}$.

2)



A, B, C forment une partition de $E = \{1,2,3,4\}^2$

car A, B, C non vides

et si $(i,j) \in E$ alors soit $i < j$ et alors $(i,j) \in A$

sinon $i \geq j$ et alors $(i,j) \notin A$. Donc ce cas soit $i = j$ et alors $(i,j) = (i,i) \in B$ et sinon $i \geq j$ et $i \neq j$ et donc $i > j$ et alors $(i,j) \in C$. $\square$