Pass options Maths et info
CMP1
15/03/2023

Fin de l'exercice :

Exercice 3 On suppose que $|x-1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes :

2 X

1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) xy 4) $\dfrac{x}{y}$ 5) $|x|-|y|$.

4) encadrement de $\dfrac{x}{y}$ sachant $\begin{cases} |x-1| \leq 2 \\ -5 \leq y \leq -4 \end{cases}$

- $-1 = 1-2$ 0 1 $1+2=3$

$|x-1| \leq 2 \iff -2 \leq x-1 \leq 2 \iff -1 \leq x \leq 3$ (1)

- $-5 \leq y \leq -4 \leq 0 \iff 0 \leq 4 \leq -y \leq 5$ $4, 5, y > 0$

$\iff \dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{-y} \leq \dfrac{1}{4}$

$\iff -\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{y} \leq -\dfrac{1}{5}$ (2)

- Soit x vérifiant (1)
  - 1er cas $0 \leq x \leq 3$ Il vient à partir de (2) que $-\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{x}{y} \leq 0$
  - 2e cas $-1 \leq x \leq 0$ Il vient à partir de (2) que $0 \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{1}{4}$

Finalement $\boxed{-\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{1}{4}}$

5) $|x-1| \leq 2 \iff -1 \leq x \leq 3 \implies |x| \in [0,3]$

$-5 \leq y \leq -4 \implies |y| \in [0,5]$

Par conséquent

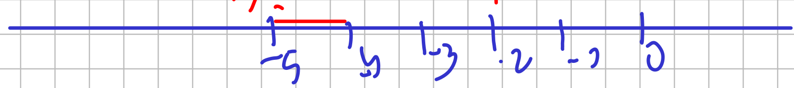
$0 - 5 \leq |x| - |y| \leq 3 - 0$

donc $\boxed{-5 \leq |x| - |y| \leq 3}$

On peut faire mieux en observant que

$-5 \leq y \leq -4 \implies 4 \leq |y| \leq 5$

$-5 \leq y \leq -4 \implies 4 \leq |y| \leq 5$



Puisque $0 \leq |x| \leq 3$ et $4 \leq |y| \leq 5$

on a $-5 \leq -|y| \leq -4$

et donc $0 - 5 = -5 \leq |x| - |y| \leq 3 - 4 = -1$

Ainsi $\boxed{-5 \leq |x| - |y| \leq -1}$

3 ×

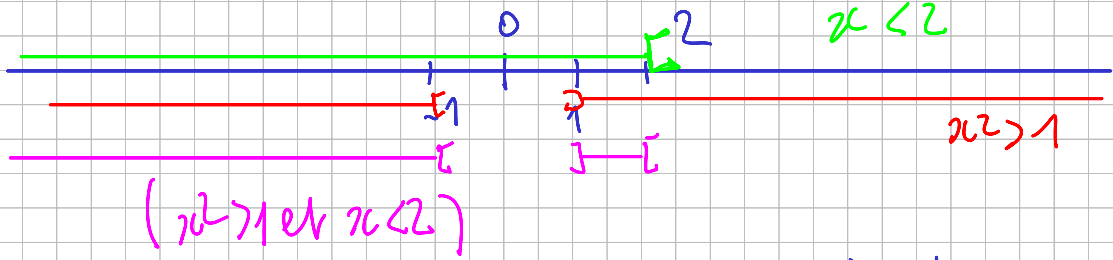
Exercice 11 Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant le prédicat :
$((x^2 > 1 \ et\ x < 2)\ ou\ (x^2 \leq 9\ et\ x < 0))$.

Traduisons les quatre inégalités qui apparaissent dans le prédicat.

- Dire que $x^2 > 1$ est équivalent à dire que $x > 1$ ou $x < -1$ c'est à dire $\underline{x \notin [-1, 1]}$
- Dire que $x < 2$ est équivalent à dire que $\underline{x \in (-\infty, 2[}$
- Dire que $x^2 \leq 9$ est équivalent à dire que $-3 \leq x \leq 3$ c'est à dire $\underline{x \in [-3, 3]}$
- Dire que $x < 0$ est équivalent à dire que $\underline{x \in (-\infty, 0[}$

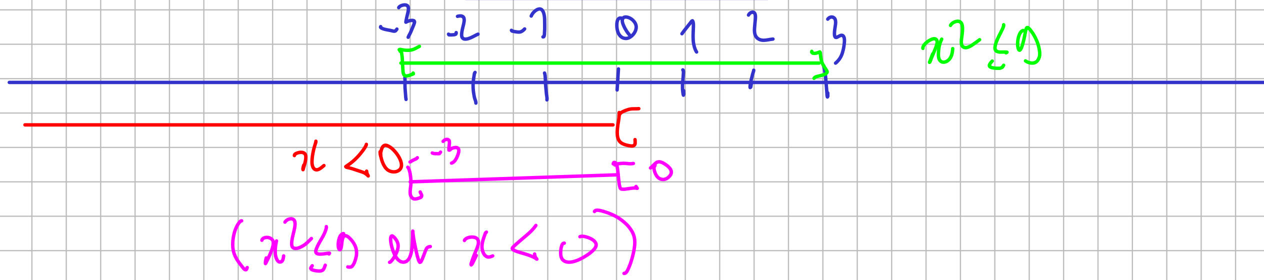
• Aussi dire que $(x^2>1$ et $x<2)$ est équivalent à dire que $x \in (-\infty, 2] \setminus [-1,1]$

c'est-à-dire $\underline{x \in (-\infty,-1[\cup]1,2[}$



• Aussi dire que $(x^2 \leq 9$ et $x<0)$ est équivalent à dire que $x \in [-3,3] \cap (-\infty,0[$

et donc à $\underline{x \in [-3,0[}$

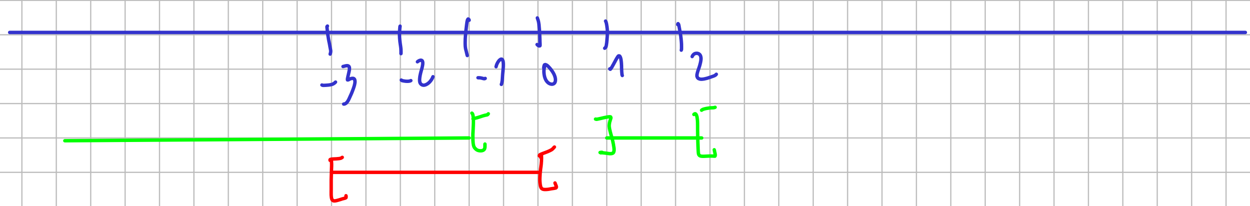


• Finalement x vérifie

$(x^2>1$ et $x<2)$ ou $(x^2 \leq 9$ $x<0)$

si et seulement si

$x \in \big((-\infty,-1[\cup]1,2[\big) \cup \big([-3,0[\big)$



c'est-à-dire $x \in (-\infty, 0[\cup]1,2[$

Exercice 13

• Soit x un réel. Considérons le prédicat $(x=2 \Longrightarrow x^2=4)$. Déterminer pour quels x le prédicat est vrai. Tous les $x \in \mathbb{R}$

4 X • Soit x un réel. Considérons le prédicat $(x=2 \Longrightarrow 1=1)$. Déterminer pour quels x le prédicat est vrai Tous les $x \in \mathbb{R}$

• Soit x un réel. Considérons le prédicat $(1=0 \Longrightarrow 2=3)$. Déterminer pour quels x le prédicat est vrai Tous les $x \in \mathbb{R}$

• Même question avec $(x=2 \Rightarrow 2=3)$
Vrai pour tout x sauf 2.

Exercice 18

• Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les prédicats suivants à l'aide de quantificateurs et donner leur négation.

5 x

1/ • L'application f n'est pas de signe constant sur I.

2/ • L'application f est majorée sur I.

3/ • L'intervalle I est inclus dans $]1,2[$.

4/ • Écrire la négation du prédicat
$((x^2 \geq 1 \text{ et } x^3 < 2) \text{ ou } (x^2 \leq 9 \text{ et } x < 0))$.

1/ $\exists a \in I \ \exists b \in I \quad f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

2/ $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in I \quad f(x) \leq M$.

⚠ $\forall x \in I \ \exists M \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$ ne veut pas dire que f est majorée et est vraie pour toute fonction f.

3/ $\forall x \in I \quad x \in]1,2[$ ou $\forall x \in I \quad 1 < x < 2$

4/ La négation de $((x^2 \geq 1 \text{ et } x^3 < 2) \text{ ou } (x^2 \leq 9 \text{ et } x < 0))$ est notée

$\overline{((x^2 \geq 1 \text{ et } x^3 < 2) \text{ ou } (x^2 \leq 9 \text{ et } x < 0))}$

c'est $\overline{(x^2 \geq 1 \text{ et } x^3 < 2)}$ et $\overline{(x^2 \leq 9 \text{ et } x < 0)}$

c'est donc $[\overline{x^2 \geq 1} \text{ ou } \overline{x^3 < 2}]$ et $(\overline{x^2 \leq 9} \text{ ou } \overline{x < 0})$

$[x^2 < 1 \text{ ou } x^3 \geq 2]$ et $[x^2 > 9 \text{ ou } x \geq 0]$

Quels $x \in \mathbb{R}$ vérifient cette négation ?

Ce sont les $x \in [0,1[\cup [\sqrt[3]{2}, +\infty)$

c'est-à-dire les $x \in [0,1[\cup [2^{1/3}, +\infty)$

(à vérifier).

6 X

Exercice 25 Pour tous réels x et y, on note $P(x,y)$ le prédicat $x+y^2=0$. Les prédicats suivants sont-ils vrais ?

1/ • $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x,y)$
2/ • $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$
3/ • $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x,y)$
4/ • $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, P(x,y)$
5/ • $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$.

1/ est faux car $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ $\overline{P(x,y)}$ est vrai
c'est-à-dire $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ $x+y^2 \neq 0$ est vrai
et en effet si on prend $x=0$ et $y=1$ on a
$x+y^2 = 0+1^2 = 1 \neq 0$.

2/ est faux car si $x>0$ alors quel que soit $y \in \mathbb{R}$
on a $y^2 \geq 0$ et donc $x+y^2>0$ et donc
$x+y^2 \neq 0$.

3/ est faux car • si $x>0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ $x+y^2 \neq 0$
• si $x=0$ et $y \neq 0$ $x+y^2 \neq 0$
• si $x<0$ et $y = \pm\sqrt{-x}$ $x+y^2 \neq 0$

4/ est vraie car si $y \in \mathbb{R}$ et si on pose $x=-y^2$
on a $x+y^2=0$

5/ est vrai prendre $x=y=0$ par exemple.

7 X **Exercice 27** Démontrer que pour tout réel x, on a $(x>2 \Longrightarrow 2e^x + x^2 - 3x > 0)$.

On va utiliser le fait que $1=e^0<e^x$ si $x>0$.

$$2e^x + x^2 - 3x = 2e^x + \left(x^2 - 2x\times\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}$$

$$= \underbrace{2e^x}_{\vee} + \underbrace{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}_{\vee} - \frac{9}{4}$$

si $x>2>0$ $2e^x > 2e^0 = 2$

$\left(x-\frac{3}{2}\right) > \frac{1}{2}$ donc $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}$.

Donc si $x > 2$ on a $2e^x + x^2 - 3x = 2e^x + (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$> 2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x > 2 \Rightarrow 2e^x + x^2 - 3x > 0)$

est vrai $\square$