Pass options Maths et info
CMP1
08/03/2023

Le symbole $\prod$ (Grand Pi)

Si $(A, \times)$ est un ensemble muni d'une "multiplication" associative et si $a_1, \dots, a_n \in A$ alors $\prod_{i=1}^{n} a_i$ est égal à $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

De façon rigoureuse $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$

et si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in A$ alors

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \times a_{n+1}$$

On observe en raison de l'associativité que

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \times a_{n+1} = a_1 \times \left(\prod_{j=1}^{n} a_{j+1}\right)$$

c'est à dire $\boxed{(a_1 \times \dots \times a_n) \times a_{n+1} = a_1 \times (a_2 \times \dots \times a_{n+1})}$

Ceci se prouve par récurrence.

Rappel
- Dire que $\times$ est une multiplication c'est dire que A a une loi notée comme la multiplication des nombres
- Une loi (interne) $\times$ sur A c'est associer à tout couple $(x, y) \in A^2$ un z noté $z = x \times y$
- Dire que $\times$ est associative c'est dire que
$$w \times (x \times y) = (w \times x) \times y$$
- On dit que $\times$ possède un neutre noté $\mathbb{1}$ s'il existe un élément noté $\mathbb{1}$ tel que
$$\mathbb{1} \times x = x = x \times \mathbb{1}.$$

NB Si $\times$ admet un neutre il est unique.

<u>Preuve</u> Supposons que $\times$ a deux neutres $\mathbb{1}$ et $\mathbb{1}'$ et montrons que $\mathbb{1} = \mathbb{1}'$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{1} \times \mathbb{1}' = \mathbb{1}' \text{ car } \mathbb{1} \text{ est neutre} \\ \mathbb{1} \times \mathbb{1}' = \mathbb{1} \text{ car } \mathbb{1} \text{ est neutre.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{1} = \mathbb{1}'.$$

Si $(A, \times)$ est tel que $\times$ possède un neutre $\mathbb{1}$ alors si $a_1, \dots, a_n \in A$ on pose

$$\prod_{i=0}^{0} a_i = \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

<u>Exemple</u> $A = \mathbb{N}$ si $i \in \mathbb{N}^*$ $a_i = i$

Alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \dots \times n = n!$

et donc $\displaystyle 0! = \prod_{i=1}^{0} a_i = 1$

Supposons que $(A, \times)$ soit tel que $\times$ est commutative c'est à dire $x \times y = y \times x$ si $x, y \in A$

Alors si I est un ensemble fini et si $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ alors

$$\prod_{i \in I} a_i \text{ est par définition } \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}$$

où $\begin{array}{rcl} \{1, \dots, n\} & \xrightarrow{b} & I \\ k & \longmapsto & i_k \end{array}$ est une bijection

Cette définition est indépendante du choix de b.

<u>Exemple</u> $I = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} = \{1,2\} \times \{1,2\}$

si $i = (i_1, i_2) \in I$ on pose

$$a_i = i_1 + 2 i_2$$

Calculons $\prod_{i \in I} a_i$

$a_{(1,1)} = 1 + 2 \times 1 = 3$ $\quad$ $a(2,1) = 2 + 2 \times 1 = 4$

$a(1,2) = 1 + 2 \times 2 = 5$ $\quad$ $a(2,2) = 2 + 2 \times 2 = 6$

Soit $\sigma : \{1, \dots, 4\} \longrightarrow I$

$1 \mapsto (1,1)$

$2 \mapsto (1,2)$

$3 \mapsto (2,1)$

$4 \mapsto (2,2)$

Donc $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{k=1}^{4} a_{i_k} = a_{i_1} \times a_{i_2} \times a_{i_3} \times a_{i_4}$

$= a_{(1,1)} \times a_{(1,2)} \times a_{(2,1)} \times a_{(2,2)}$

$= 3 \times 5 \times 4 \times 6$

$= 360$

Soit $\sigma' : \{1, \dots, 4\} \longrightarrow I$

$1 \mapsto (1,1)$

$2 \mapsto (2,1)$

$3 \mapsto (1,2)$

$4 \mapsto (2,2)$

$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{k'=1}^{4} a_{i_{k'}} = a_{(1,1)} \times a_{(2,1)} \times a_{(1,2)} \times a_{(2,2)}$

$= 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$= 360$

On constate que le calcul de $\prod_{i \in I} a_i$ ne dépend de σ ou de σ'.

Autres symboles Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ est $E_1 \cup \dots \cup E_n$

Puisque $\cup$ est associative et commutative on peut définir si I est fini et $E_i, i \in I$ est une famille finie d'ensemble

$\bigcup\limits_{i \in I} E_i$

comme étant égal à $E_{i_1} \cup \dots \cup E_{i_n} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_{i_k}$

où $b : \{1, \dots, n\} \longrightarrow I$ est une bijection
$k \longmapsto b(k) = i_k$

Si $f_1 : E_1 \to E_2$ $f_2 : E_2 \longrightarrow E_3$ ... $f_n : E_n \to E_{n+1}$

alors on peut définir $\bigcirc\limits_{i=1}^{n} f_i$ comme étant égale à $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$

⚠ la composition n'est pas commutative

et si $f : E \longrightarrow E$ et si $n \in \mathbb{N}^*$

on pose $\circ^n f = f \circ \underbrace{f \circ \dots}_{n \text{ fois}} \circ f$

et si $n = 0$ $\circ^0 f = \mathrm{Id}_E$.

On a $\circ^n f \circ \circ^m f = \circ^{n+m} f$.

$$(\circ^n f) \circ (\circ^m f) = (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}) \circ (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ fois}}) =$$

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f \circ f}_{n+m \text{ fois}} = \circ^{n+m} f$$

__Exemple__ Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longmapsto I$

Si $a \in I$ on définit la suite a_n suivante :

$$a_n = (\bigcirc^n f)(a)$$

Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

C'est une suite récurrente associée à f.

__Exemples.__ Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lambda + x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ fixé)

La suite définie par

$a_n = (\bigcirc^n f)(a)$ où $a \in \mathbb{R}$ fixé

est la suite qui vérifie

$a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = f(a_n) = \lambda + a_n$$

C'est la suite arithmétique de premier terme a et de raison λ.

On peut prouver par récurrence sur n que

$$a_n = a + n\lambda .$$

• Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé

La suite définie par
$b_n = (\circ^n g)(b)$ avec $b \in \mathbb{R}$ fixé

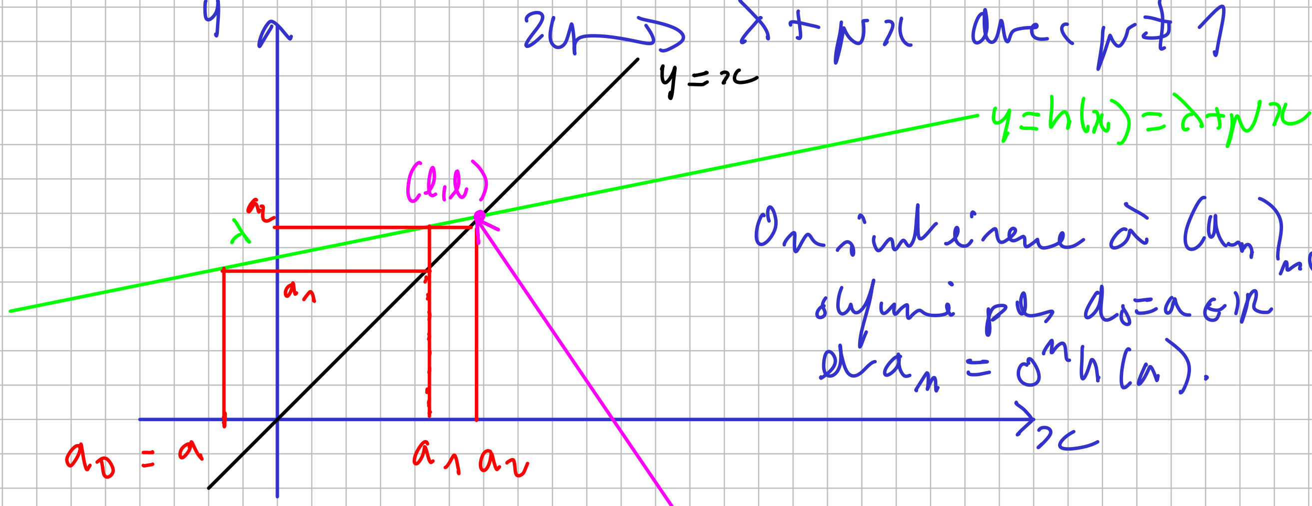
est la suite qui vérifie
$b_0 = b$ et si $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = g(b_n) = \lambda . b_n$$

On peut prouver par récurrence sur n que
$b_n = b \times \lambda^n$

C'est la suite géométrique de premier terme b et de raison λ (si $\lambda \neq 0$).

. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \lambda + \mu x$ avec $\mu \neq 1$



On s'intéresse à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a \in \mathbb{R}$ et $a_n = \circ^n h(a)$.

On va étudier $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en plusieurs étapes.

1/ On cherche l tel que $h(l) = l$
On résout donc $\lambda + \mu l = l$
c'est à dire $\lambda = l(1-\mu)$
et donc, puisque $\mu \neq 1$ $\boxed{\frac{\lambda}{1-\mu} = l}$

2/ On pose $b_n = a_n - l$
Calculons b_{n+1}

On a $b_{n+1} = a_{n+1} - \ell$ par définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a $a_{n+1} = h(a_n)$ par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $b_n = a_n - \ell$ donc $a_n = b_n + \ell$ par définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Ainsi
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - \ell \\ &= h(a_n) - \ell \\ &= \lambda + \mu a_n - \ell \\ &= \lambda + \mu(b_n + \ell) - \ell \\ &= \lambda + \mu b_n + \mu\ell - \ell \\ &= \mu b_n + (\lambda + \mu\ell - \ell) \\ &= \mu b_n + ((\lambda + \mu\ell) - \ell) \\ &= \mu b_n \end{aligned}$$

Conclusion $b_0 = a_0 - \ell = a - \ell$

et $b_{n+1} = \mu b_n$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de 1er terme $b_0 = a - \ell$ et de raison μ

Ainsi $b_n = (a-\ell)\mu^n$

donc $a_n = b_n + \ell = (a-\ell)\mu^n + \ell$

On $\ell = \frac{\lambda}{1-\mu}$

Donc $\boxed{a_n = \left(a - \frac{\lambda}{1-\mu}\right)\mu^n + \frac{\lambda}{1-\mu}}$

Une telle suite s'appelle suite arithmético-géométrique.

□

Quelques exercices d'application du cours

1 ✗ **Exercice 1**

- Montrer que si un élément $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$.
- Montrer que dans $\mathbb{R}$ un carré est positif ou nul. (Écrire $x^2 = x \times x$ si $x \geq 0$ et $x^2 = (-x) \times (-x)$ si $x \leq 0$).
- Montrer qu'on ne peut pas définir d'ordre sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui en fasse un corps ordonné.

• 1ère preuve. Si on admet que la multiplication par un nombre négatif ou nul renverse l'ordre. On a, puisque $-1 \leq 0$ et $x \leq 0$

$$-x = (-1) \times x \geq (-1) \times 0 = 0$$

• Si on admet que l'addition conserve l'ordre on a, puisque $x \leq 0$

$$0 = x + (-x) \leq 0 + (-x) = -x.$$

• $x^2 = x \times x = (-x) \times (-x)$

- si $x \geq 0$, puisque la multiplication par un nombre positif ou nul préserve l'ordre on a

$$x^2 = x \times x \geq x \times 0 = 0$$

- si $x \leq 0$ alors le même argument appliqué à $(-x) \geq 0$ implique donc $x^2 = (-x)^2 \geq 0$.

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ avec la loi

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Supposons qu'il y a un ordre sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ adapté à $+$: $0 \leq 1$ donc

$$1 = 0 + 1 \leq 1 + 1 = 0$$

et donc $1 \leq 0 \leq 1$ et finalement $1 = 0$.

Ça contredit le fait que $1 \neq 0$.

Donc il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ adapté à $+$.

Exercice 3 On suppose que $|x-1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes :

2 X

1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) xy 4) $\dfrac{x}{y}$ 5) $|x|-|y|$.

Dire que $|x-1| \leq 2$ signifie que

$$-2 \leq x-1 \leq 2$$

c'est-à-dire $-1 \leq x \leq 3$

Si de plus $\boxed{-5 \leq y \leq -4}$

On a
- $-6 = (-1) + (-5) \leq x + y \leq 3 + (-4) = -1$

donc $-6 \leq x+y \leq -1$

- $4 = -(-4) \leq -y \leq -(-5) = 5$

donc $-1+4 \leq x-y \leq 3+5$

c'est-à-dire $\boxed{3 \leq x-y \leq 8}$

• On a $-1 \leq x \leq 3$

$-5 \leq y \leq -4$

donc $4 \leq -y \leq 5$

ainsi $(-1)(-y) \leq x \times (-y) \leq 3 \times (-y)$

car $-y \geq 0$

donc $y \leq -xy \leq 3 \times (-y)$

Finalement $-5 \leq y \leq -xy \leq 3 \times (-y) \leq 3 \times 5 = 15$

C'est-à-dire $-5 \leq -xy \leq 15$

Ainsi $\boxed{-15 \leq xy \leq +5}$