Pass options Maths et info
CMP1
01/03/2023

Utilisation des indices et des symboles Σ, Π, $\circ$ ....

<u>Indices.</u> Soit E un ensemble, I un second ensemble et $\varphi : I \to E$ une application. Une telle application définit une <u>famille indexée</u> par I d'éléments de E. On la note $(x_i)_{i \in I}$ et $x_i = \varphi(i)$. Les éléments i de I s'appellent alors les indices.

<u>Exemples.</u> • Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = u$ est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$.
Ici $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$

• Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et m colonnes de réels. C'est une famille de réels indexée par les couples $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$.
Ici $E = \mathbb{R}$ et $I = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$.

• Soit $F = \{\sqrt{2} + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$.
Soit $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
$r \mapsto \sqrt{2} + r = x_r$
On définit la famille de réels $(x_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ indexée par $\mathbb{Q}$. Les termes $x_r \in F$.

• Si $x \in \mathbb{R}$ on pose
$F(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + r \quad r \in \mathbb{Q}\}$
par exemple $F(\sqrt{2}) = F = \{\sqrt{2} + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$
On remarque que si $x, x' \in \mathbb{R}$ alors

Soit $x-x' \in \mathbb{Q}$ et alors $F(x)=F(x')$
Soit $x-x' \notin \mathbb{Q}$ et alors $F(x) \cap F(x') = \emptyset$
On obtient une partition de $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ est la réunion de tous les $F(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$
car $x \in F(x) \subset \mathbb{R}$ et les $F(x)$ sont soient égaux soient disjoints.
On choisit dans chaque $F(x)$ un unique réel. Ainsi on construit un ensemble I tel que si $x \in \mathbb{R}$ il existe un et un seul $i \in I$ vérifiant $F(x) = F(i)$.
On a donc $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} F(i)$,

si $i \neq j$ $F(i) \cap F(j) = \emptyset$
et si $i \in I$ $F(i) \neq \emptyset$ car $i \in F(i)$

Ici $E = \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
I vient d'être fini
et la famille associée est
$(F(i))_{i \in I}$.

Attention choisir n'est pas anodin. Faire un choix comme ici est possible si on admet l'Axiome du choix qui est un axiome fondateur de la théorie des ensembles usuellement pratiquée en mathématique.

Exemples plus concrets

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2^n$
que vaut u_{10} ? $u_{10} = 2^{10} = 1024$

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
avec $u_0 = u_1 = 1$
que vaut u_{10} ?

$u_0 = u_1 = 1$ $\quad u_2 = u_0 + u_1 = 2$

$u_3 = 1+2 = 3$

$u_4 = 2+3 = 5$

$u_5 = 3+5 = 8$

$u_6 = 5+8 = 13$

$u_7 = 8+13 = 21$

$u_8 = 13+21 = 34$

$u_9 = 21+34 = 55$

$u_{10} = 34+55 = 89$

Cette suite est la suite de Fibonacci.
Que vaut u_n, $n \in \mathbb{N}$?

• Pour répondre à cette question on résout
$x^2 = 1+x$ c'est à dire $x^2 - x - 1 = 0$
C'est une équation du second degré. Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 5$
les racines de l'équation sont donc
$r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⟵ nombre d'or.

• On pose $v_n = r_1^n$ et $w_n = r_2^n$
On observe que $v_{n+2} = v_n + v_{n+1}$

et $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$.

En effet $r_1^2 = 1 + r_1$ et $r_2^2 = 1 + r_2$
car r_1, r_2 racines de $X^2 - X - 1 = 0$

donc $v_{n+2} = r_1^{n+2} = r_1^n \times r_1^2$ $\quad w_{n+2} = r_2^{n+2} = r_2^n \times r_2^2$

$$= r_1^n \times (1+r_1) \qquad\qquad = r_2^n (1+r_2)$$
$$= r_1^n + r_1^{n+1} \qquad\qquad = r_2^n + r_2^{n+1}$$
$$= v_n + v_{n+1} \qquad\qquad = w_n + w_{n+1}$$

On observe que si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et si on pose $x_n = \lambda v_n + \mu w_n$ on a aussi que $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$.

En effet
$$x_{n+2} = \lambda v_{n+1} + \mu w_{n+2}$$
$$= \lambda (v_n + v_{n+1}) + \mu (w_n + w_{n+1})$$
$$= (\lambda v_n + \mu w_n) + (\lambda v_{n+1} + \mu w_{n+1})$$
$$= x_n + x_{n+1}$$

Cherchons λ et μ pour que $x_0 = 1$ et $x_1 = 1$

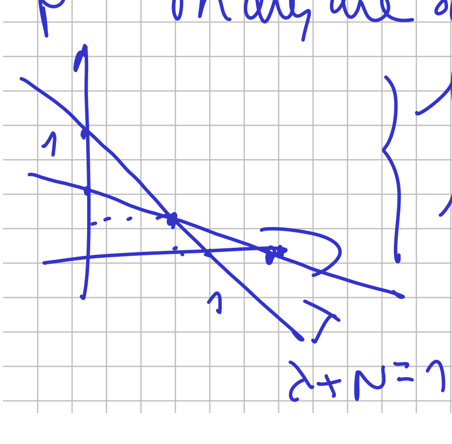
On veut donc

$$\begin{cases} x_0 = \lambda v_0 + \mu w_0 = 1 \\ x_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 = 1 \end{cases}$$

Or $v_0 = r_1^0 = 1 \quad w_0 = r_2^0 = 1$

$v_1 = r_1^1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad w_1 = r_2^1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

On cherche donc λ et μ tels que



$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

On résout par substitution (par exemple)

On a $\mu = 1-\lambda$ (de $1=\lambda+\mu$)

donc $1 = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}\lambda$ donc $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2}$ et $\mu = 1-\lambda = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Finalement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

vérifie $x_0 = x_1 = 1$ et $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$

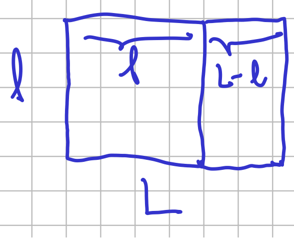
Cette suite coïncide donc avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $n=0$ et 1 et elle vérifie à partir du rang 2 la même relation de récurrence que u_n. ($u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ et $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$)

Ce sont donc les mêmes suites.

On peut ainsi plus facilement calculer u_n directement sans passer par les termes précédents.

Lien avec le nombre d'or.

Le nombre d'or s'appelle la divine proportion.



C'est la proportion d'un rectangle de côté L et l tel que lorsqu'on retire à un rectangle un carré on conserve un rectangle de même proportion.

On veut donc que $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L-\ell} = \lambda$ le nombre d'or. On a donc $\lambda = \frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\ell(\frac{L}{\ell}-1)} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}-1} = \frac{1}{\lambda-1}$

c'est à dire $\lambda = \frac{1}{\lambda-1}$

et donc $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1) = 1$

et donc $\boxed{\lambda^2 - \lambda - 1 = 0}$

Le nombre d'or est donc bien la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ associée à la suite de Fibonacci définie par $u_1 = u_2 = 1$ et si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Le symbole Σ.

Soit I un ensemble fini d'indices et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I de nombres, ou de vecteurs, ou de matrices, ou de fonctions numériques, en tout cas d'objets qu'on peut additionner.

Alors $\sum_{i \in I} x_i$ désigne la somme de tous les x_i.

Exemple $I = \{1, \dots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$ et

$x_i = i$ si $i \in I$

alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} i$

$$= 1 + 2 + \dots + n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

En effet, ceci se montre par récurrence sur n.

Ou, on peut suivre la preuve qu'on prête à Gauss enfant.

$$S_n = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \dots + \boxed{n-2} + \boxed{n-1} + \boxed{n}$$

$$S_n = \boxed{n} + \boxed{(n-1)} + \boxed{(n-2)} + \dots + \boxed{3} + \boxed{2} + \boxed{1}$$

$$2 S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

$$2 S_n = n(n+1)$$

donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Remarque</u> Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'objets qu'on peut additionner indexée par $\mathbb{N}$,

Alors $\sum_{i=1}^{n} x_i$ est par définition

égale à $\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i$.

On a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i$

De même $\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i\in\{0,\dots,n\}} x_i$

et plus généralement si $m \leq n$

on pose $\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i\in\{m,\dots,n\}} x_i$

Exemple. Soit $r \in \mathbb{R}$ et soit $x_n = r^n$.
Que vaut $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} r^i$?

On a $S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ (si $r \neq 1$)

Ceci se prouve par récurrence sur n.
Voici une autre preuve, moins rigoureuse.

$S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} r^i$

$= \left(\boxed{r^0} + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n\right) S_n$

donc $rS_n = r\left(r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n\right)$
$= r^{1+0} + r^{1+1} + r^{1+2} + \dots + r^{1+n}$

$rS_n \Big(\quad = r^1 + r^2 + \dots + r^n + \boxed{r^{n+1}}$

$S_n - rS_n = r^0 + (r^1 - r^1) + (r^2 - r^2) + \dots + (r^n - r^n) - r^{n+1}$

$S_n - rS_n = r^0 - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$ et donc $S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$ $\square$