Pass options Maths et info
CMP1
08/02/2023

Nouvelle démonstration du résultat suivant :

> Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble à n éléments. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

1/ Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

On a $\mathrm{Card}\, E = 0$ et $\mathrm{Card}\, \mathcal{P}(E) = 1 = 2^0$
et $\emptyset$ est le seul ensemble à 0 élément.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que si E est un ensemble à n éléments alors $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.
Soit F un ensemble à $n+1$ élément. Puisque $n+1 \in \mathbb{N}^*$, $F \neq \emptyset$ donc F possède au moins un élément. Notons a cet élément.
On pose $E = F \setminus \{a\}$. L'ensemble a n éléments puisque $F = E \cup \{a\}$ et $\{a\} \notin E$ et $\mathrm{Card}(F) = n+1$
Donc par hypothèse $\mathcal{P}(E)$ a 2^n élément.

- Si $A \subset E$, c'est à dire si $A \in \mathcal{P}(E)$
  on considère $A \cup \{a\} = A'$
  alors $A \subset F$ et $A' \subset F$ et $A \neq A'$ car $a \in A' \setminus A$
  (car $A \subset E \subset F$ $A \subset F$ et $\{a\} \subset F$)
  Si $A_1, A_2 \subset E$ et $A_1 \neq A_2$ alors
  $A_1 \cup \{a\} \neq A_2 \cup \{a\}$. En effet
  si $A_1 \neq A_2$ deux cas se présentent
  1er cas il existe $a_1 \in A_1$ mais $a_1 \notin A_2$
  alors $a_1 \in A_1 \cup \{a\}$ et $a_1 \notin A_2 \cup \{a\}$
  le fait que $a_1 \notin A_2 \cup \{a\}$ résulte du fait

que $a_1 \notin A_2$ mais $a_1 \in E$ et $a \notin E$
donc $a_1 \neq a$ donc $a_1 \notin A_2 \cup \{a\}$.
2e cas : il existe $a_2 \in A_2$ mais $a_2 \notin A_1$. Il se traite comme le 1er cas et on obtient $a_2 \in A_2 \cup \{a\}$ et $a_2 \notin A_1 \cup \{a\}$.
Dans les deux cas on obtient $A_1 \cup \{a\} \neq A_2 \cup \{a\}$.

- Soit maintenant $B \subset F$.
  - soit $a \notin B$ et alors $B \subset E$
  - soit $a \in B$ et alors $A = B \setminus \{a\} \subset E$ et $A \cup \{a\} = B$.

Finalement à chaque élément de $\mathcal{P}(F)$ on associe exactement deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ qui sont tous les deux différents et à deux éléments distincts de $\mathcal{P}(F)$ on associe quatre éléments tous distincts de $\mathcal{P}(E)$. De cette façon on obtient tous les éléments de $\mathcal{P}(E)$.
Ceci signifie que $\mathcal{P}(F)$ contient 2 fois plus d'éléments que $\mathcal{P}(F)$

Donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2\,\mathrm{Card}(\mathcal{P}(F))$

$$= 2 \times 2^n$$

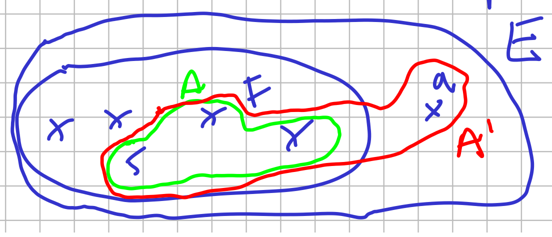
$$= 2^{n+1}$$

On vient de prouver que la propriété

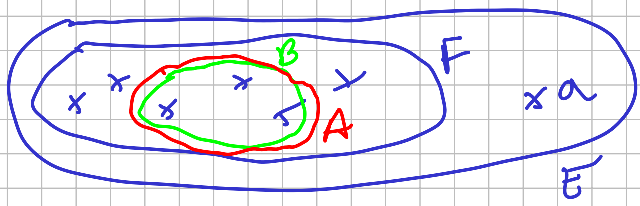
$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n \text{ si } \mathrm{Card}(E) = n$$

est vraie au rang 0 (c'est le cas où l'on part avec l'ensemble vide) et qu'elle est héréditaire (ce que l'on vient d'établir). Elle est donc vraie en vertu du principe particulier de récurrence.

Passage de $A \subset F$ à
$A' = A \cup \{a\}$

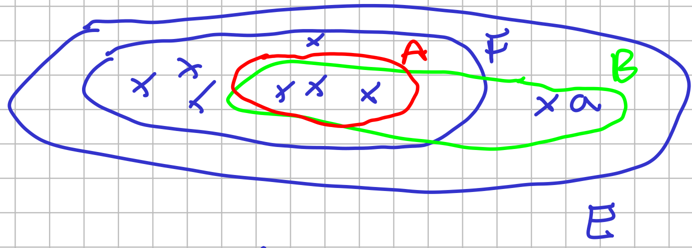


Passage de $B \subset E$ à A



1er cas $B \subset F$

$A = B$

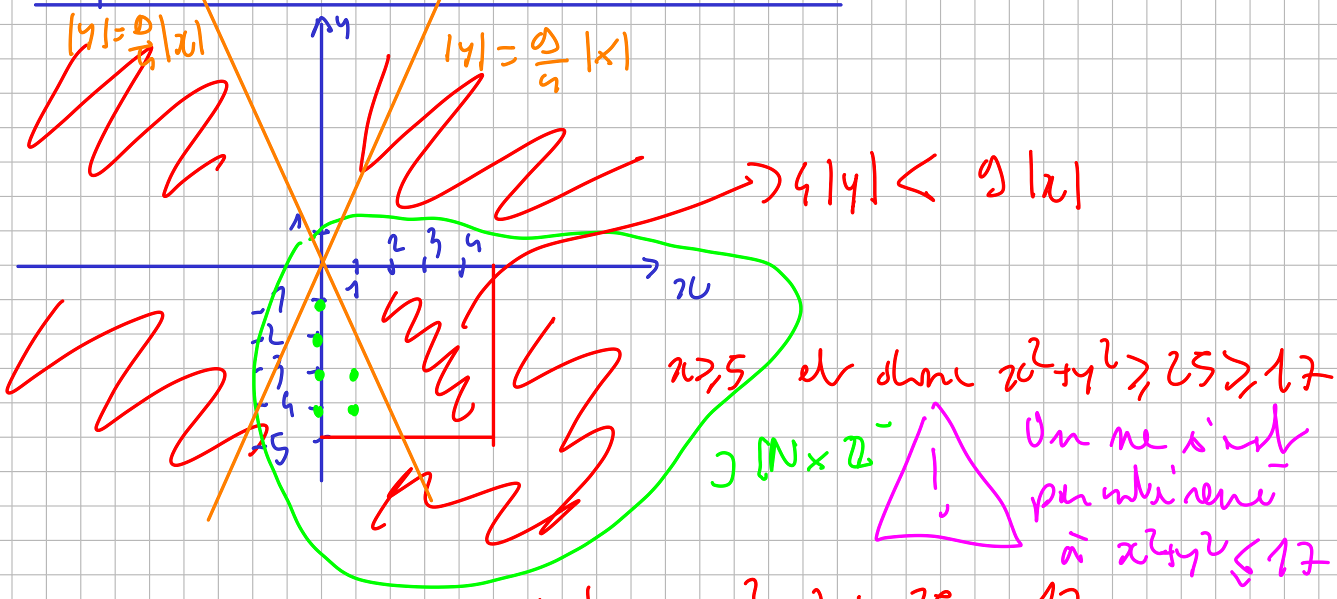


2e cas $B \not\subset F$

$A = B \setminus \{a\}$
$(a \in B)$

À propos du prochain contrôle

Esquisse de résolution du 1er exercice.



1/ Puisque $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^-$ on cherche ses éléments sous la forme (x,y) où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

2/ Puisque si $(x,y) \in X$ $x^2+y^2 \leq 17$

- On a donc, puisque $x^2 \geq 0$, que $y^2 \leq 17$ et donc $y \geq -\sqrt{17}$ et puisque $y \in \mathbb{Z}^-$
  $y \in \{-1,-2,-3,-4\}$

- On a donc puisque $y^2 \geq 0$ que $x^2 \leq 17$ et donc $x \leq \sqrt{17}$ et puisque $x \in \mathbb{N}$
  $x \in \{0,1,2,3,4\}$

Traduisons que $x^2+y^2 \le 17$

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
-1	1	2	5	17	17
-2	4	5	8	13	20
-3	9	10	13	18	25
-4	16	17	20	25	32

Ce tableau qui exprime x^2+y^2 en fonction de valeurs possibles de x et y limite les couples qui vérifient $x^2+y^2 \le 17$

3/ Traduisons la condition $g(x) \le g(y)$. On le fait sur le tableau précédent en entourant en vert les couples qui vérifient cette ultime condition.

Exemple de rédaction de l'exercice 2

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(0)=0$. Alors dire que f vérifie $(*)$ signifie que

si $x \in \mathbb{R}^+$ et si $y \in \mathbb{R}^+$ si $x<y$ alors $0 \le f(y)-f(x) < \frac{1}{\sqrt{y-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad x<y \Rightarrow 0 \le f(y)-f(x) \le \frac{1}{\sqrt{y-x}}$

Notons que $(*)$ implique que

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad x<y \Rightarrow 0 \le f(y)-f(x)$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad x<y \Rightarrow f(x) \le f(y) \; (**)$

et $(**)$ signifie que f est croissante.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrons que $0 \le f(n) < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Appliquons $(*)$ à $x=0$ et $y=n$

Puisque $0, n \in \mathbb{R}^+$ et que $0 < n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
on a d'après $(*)$ $0 \leq f(n) - f(0) < \frac{1}{\sqrt{n-0}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Or on sait, par hypothèse, que $f(0) = 0$
On a donc $0 \leq f(n) - 0 = f(n) < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ceci prouve que si $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq f(n) < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrons que si $x \in]0, n[$
alors $0 \leq f(x) \leq f(n)$
Si on applique $(*)$ à 0 et x. Puisque
$0 < x$ on a d'après $(*)$
$$0 \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{\sqrt{x-0}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
Mais comme $f(0) = 0$ on a
$$0 \leq f(x) - 0 = f(x)$$
Ainsi $\forall x \in]0, n[$ $0 \leq f(x)$.

Appliquons $(*)$ à x et n
On a donc, puisque $x < n$
$$0 \leq f(n) - f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n-x}}$$
Ainsi $0 \leq f(n) - f(x)$
et donc $f(x) \leq f(n)$
Ainsi si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, n[$ on a
$$0 \leq f(x) \leq f(n)$$

4/ Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x > 0$. Soit n défini par

$$n = \max\left(1 + \text{Entière}(x), 1 + \text{Entière}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right)$$

On a $n > x$ et $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $0 \leq f(x) \leq f(n) < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

question 3 question 3 question 2

par passage à l'inverse et à la racine carrée.

5/ Soit $x > 0$. D'après 4 si $\varepsilon > 0$ on a

$$0 \leq f(x) < \varepsilon.$$

Supposons $f(x) \neq 0$. Alors $f(x) > 0$.

On pose $\varepsilon = \frac{f(x)}{2}$. On a donc

$$0 \leq f(x) < \varepsilon = \frac{f(x)}{2}$$

$f(x) > 0$

et donc $0 = f(x) - f(x) < \frac{f(x)}{2} - f(x) = -\frac{f(x)}{2} < 0$

et donc $0 < 0$ c'est impossible

l'hypothèse $f(x) > 0$ est fausse. Donc $f(x) = 0$.

<u>Esquisse de résolution de l'exercice 3</u>

Prouvons que si $x > 0$ et si $n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

<u>Preuve</u> Vérité au rang 0.

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x \geq 1 + 0x$$

Donc on a bien $(1+x)^n \geq 1 + nx$ si $n = 0$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

On suppose que si $x > 0$ alors $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ $\big)(H_n)$

On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$

$\underset{\uparrow}{a} \times (\underset{\uparrow}{b}+\underset{\uparrow}{c}) = a\times b + a\times c$

$(1+x)^n \quad 1 \quad x$

$$= (1+x)^n \times 1 + (1+x)^n x$$
$$= (1+x)^n + (1+x)x$$

par hypothèse de récurrence $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

et donc aussi, puisque $x \geqslant 0$

$(1+x)^n \geqslant 1+nx \geqslant 1$

On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n + (1+x)^n x$ (et $x \geqslant 0$)

$$\geqslant 1+nx + 1\times x$$

$$\geqslant 1+(n+1)x$$

et donc a prouvé $P(n+1)$ c'est à dire si $x > 0$ $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$.

Ceci prouve l'hérédité de $P(n)$.

Et comme on a vu que $P(0)$ est vraie

On obtient que $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ vraie

(Principe de récurrence)

$\square$