Pass options Maths et info
CMP1
01/02/2023

Continuité de la fonction numérique de la variable de la variable réelle f défini par $f(x)=x^2$ si $x\in\mathbb{R}$. Preuve en utilisant la formule

(*) " $\forall a\in\mathbb{R}$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists \eta>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ "

On va montrer que f défini par $f(x)=x^2$ vérifie (*)

Preuve.

Soit a un réel (ici on choisit un réel quelconque et on va montrer que f est continue en a).

Soit $\varepsilon>0$ (ici on choisit un réel strictement positif quelconque)

Cherchons $\eta>0$ tel que " $\forall x\in\mathbb{R}$ $|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ " soit vrai

Pour trouver η on va d'abord étudier $|f(x)-f(a)|$

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x-a|\,|x+a|$$

supposons ainsi fixé un $\eta>0$ (on oublie ε ...)

supposons que x est choisi de telle sorte que $|x-a|<\eta$

On a alors $|x+a| = |x-a+a+a| = |x-a+2a| = |(x-a)+2a| \leq |x-a|+|2a|$

Ainsi si $|x-a|<\eta$ on a $|x+a| \leq |x-a|+2|a| < \eta+2|a|$

Par conséquent si $|x-a|<\eta$

on a $|f(x)-f(a)| = |x-a|\,|x+a| < \eta \times (\eta+2|a|)$

Supposons $0<\eta<1$

on a alors, si $|x-a|<\eta$ $|f(x)-f(a)| < \eta\,(\eta+2|a|)$ (I)

$< 1\,(1+2|a|)$ (II)

Maintenant considérons $\varepsilon>0$ et rappelons nous que l'on veut choisir $\eta > 0$ tel que si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pour l'instant on sait par (II) que si $0 < \eta < 1$ alors $|f(x) - f(a)| < 1\,(1+2|a|)$

on sait aussi par (I) que si $0 < \eta < 1$ alors $|f(x) - f(a)| < \eta(\eta + 2|a|) < \eta(1+2|a|)$

Conclusion intermédiaire,

Si $a \in \mathbb{R}$, si $0 < \eta < 1$ et si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - f(a)| < \eta(1+2|a|)$ (III)

Considérons $\varepsilon > 0$. Comment choisir $\eta \geq 0$ pour que si $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

D'après (III) il suffit de choisir $\eta \in]0,1[$ tel que $\eta(1+2|a|) < \varepsilon$

et donc $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$ et $\eta < 1$

on pose $\eta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$

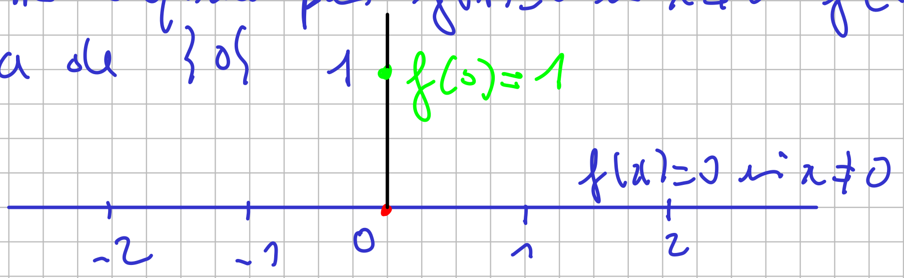
Alors $\eta \in]0,1[$ car $\frac{1}{2} \in]0,1[$ et $\frac{\varepsilon}{1+2|a|} > 0$

et si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-a| < \eta$ alors

$$|f(x) - f(a)| < \eta(1+2|a|) \leq \frac{\varepsilon}{1+2|a|}(1+2|a|) = \varepsilon$$

Ceci prouve que si $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ (prendre $\eta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$) tel que si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. c'est-à-dire "$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Non continuité de la fonction de Dirac. C'est la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\neq 0$ $f(0)=1$. C'est l'indicatrice de $\{0\}$



On veut montrer que cette fonction de Dirac ne vérifie pas
"$\forall a\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad |x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$"
c'est à dire vérifie la négation de cette assertion qui est

$$\exists a\in\mathbb{R}\,[\exists\varepsilon>0\,[\forall\eta>0\ \exists x\in\mathbb{R}\quad |x-a|<\eta \text{ et } |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon\,]]$$
(**)
$$\forall a\in\mathbb{R}\,[\forall\varepsilon>0\,[\exists\eta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad |x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\,]]$$

Prouvons donc que la fonction de Dirac vérifie (**).
Testons avec $a=0$ et $\varepsilon=1$.
Soit $\eta>0$ soit $x\in\,]-\eta,\eta[\,\setminus\{0\}$. alors $|x-0|<\eta$ et $f(x)=1$ donc $|f(x)-f(0)|=|1-0|=1=\varepsilon\geq\varepsilon$.

Ainsi $\exists a\in\mathbb{R}$ (prendre $a=0$) $\exists\varepsilon>0$ (prendre $\varepsilon=1$) $\forall\eta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ avec $|x-a|<\eta$ et $|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$ (prendre par exemple $x=\frac{\eta}{2}$).

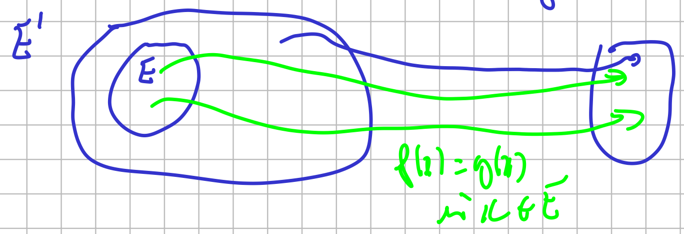
Devinette. Trouver $x\in\mathbb{R}$ tel que $\boxed{\forall k>0\quad |x|<k}$ (***)

Montrons que 0 convient et que tout $x\neq 0$ ne convient pas.
- Soit $k>0$ on a $|0|=0<k$. Donc $\forall k>0\ |0|<k$ et ainsi 0 convient.
- Soit $x\neq 0$ on a $|x|>0$ on prend $k=|x|$. On a $|x|=k$ donc "$|x|<k$" n'est pas vérifiée. Donc si $x\neq 0$ $\exists k>0$ (prendre $k=|x|$) tel que $|x|\geq k$. Donc x ne convient pas (***).

Retour sur les notions associées aux applications.

Restriction / prolongement

Soit $E \subset E'$, $f : E \to F$ et $g : E' \to F$ telles que si $x \in E$ alors $f(x) = g(x)$



On dit que f est la restriction de g à E et que g est un prolongement de f à E'.

Par exemple Soit $f :]0,+\infty) \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x) = 0$

Soit $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$g_1(x) = 0$ si $x > 0$
$g_1(x) = 1$ si $x \leq 0$

$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$g_2(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}$

Les applications g_1 et g_2 sont deux prolongements différents de f à $\mathbb{R}$, l'application f est la restriction de g_1 et de g_2 à $]0,+\infty)$.

Retour sur la théorie des ensembles.

Partition Soit E un ensemble. Une partition de E est la donnée d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de E telle que
- Si $i \in I$ $E_i \neq \emptyset$
- Si $i, j \in I$ et $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \emptyset$
- $E = \bigcup_{i \in I} E_i$

Par exemple • $E = \{1,2,3,4\}$ $E_1 = \{1,2\}$ $E_2 = \{3\}$ $E_3 = \{4\}$
La famille (E_1, E_2, E_3) forme une partition de E.

• Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 = \{n \in E \mid n \text{ pair}\}$ $\quad E_2 = \{n \in E \mid n \text{ multiple de } 3\}$

$E_3 = \{n \in E \mid n \text{ multiple de } 5\}$.

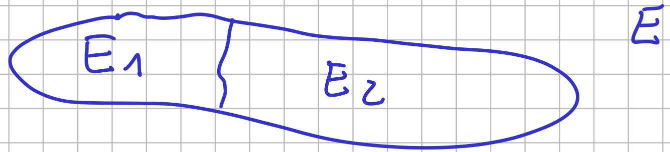
Donc $E_1 = \{2, 4, 6\}$ $\quad E_2 = \{3, 6\}$ $\quad E_3 = \{5\}$

(E_1, E_2, E_3) vérifie $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \neq E$ et $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

donc ce n'est pas une partition $\quad$ (car $1 \notin E_1 \cup E_2 \cup E_3$) $\quad$ (car $6 \in E_1 \cap E_2$)

Questions. Soit $E = \{1, \dots, n\}$.

1. Combien de partitions à deux sous ensembles de E dont l'un contient k éléments ?
2. Combien de partitions à deux sous ensembles de E ?



• si $k = 1, \dots, n-1$ on en trouve $\binom{n}{k}$

• si $k = 0$ on en trouve 0 car $\emptyset$ n'est pas un élément d'une partition

• si $k = n$ alors $E_1 = E$ ou $E_2 = E$ et donc l'autre est le vide ce qui n'est pas possible. Donc 0 partitions

. Combien de partitions à 2 sous ensembles de E ?

Réponse $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}\right) = \frac{1}{2}(2^n - 2)$

Exemple $\quad E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ Partition à deux sous ensemble

$\{1\}\ \{2,3,4\}$ $\qquad \{1,2\}\ \{3,4\}$

$\{2\}\ \{3,4,1\}$ $\qquad \{1,3\}\ \{2,4\}$

$\{3\}\ \{4,1,2\}$ $\qquad \{1,4\}\ \{2,3\}$

$\{4\}\ \{1,2,3\}$

7 partitions

$7 = \frac{1}{2}(2^4 - 2)$

$\left(= \frac{1}{2}(16 - 2)\right)$

$\frac{1}{2}\left(\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}\right) = \frac{1}{2}(14) = 7$

$\frac{1}{2}(4 + 6 + 4) = \frac{1}{2}(14)$