Pass options Maths et info
CMP1
25/01/2023

Les applications ....

Soit $f : E \to F$ une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

On a vu (définition) que si $x \in E$ il existe un et un seul élément y de F tel que $y = f(x)$. Cet élément a été appelé image de x par f.

Considérons maintenant un élément y de F. S'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ alors x est appelé antécédent de y par f.

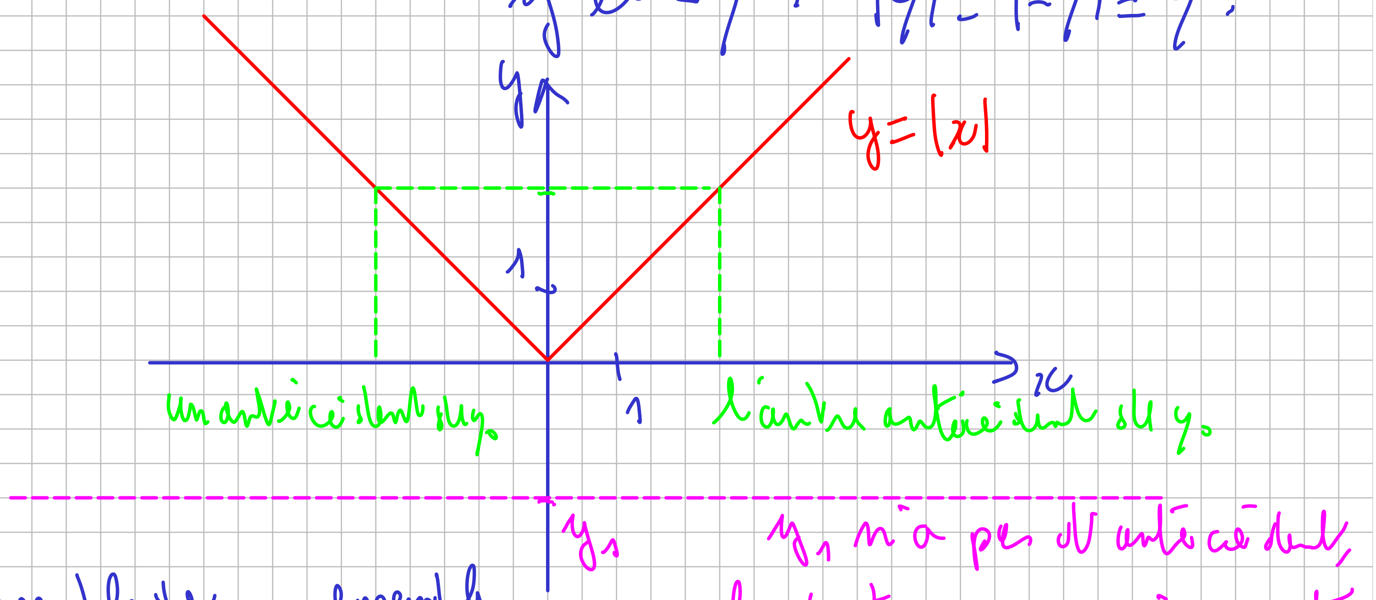
⚠ . Tous les y de F n'ont pas systématiquement un antécédent.

. Certains y de F peuvent parfois avoir plusieurs antécédents.

Par exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$
c'est à dire $f(x) = x$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -x$ si $x < 0$.

Cette application, appelée valeur absolue, est telle que si $y \in \mathbb{R}$ alors,
soit $y < 0$ et alors il ne possède d'antécédent,
soit $y = 0$ et alors il y a un seul antécédent 0

Soit $y>0$ et alors il possède deux antécédents exactement y et $-y$: $|y|=|-y|=y$.



ensemble de départ

ensemble d'arrivée

Soit $f : E \to F$ application,

- C'est une injection (ie f est injective) si pour tous les $x, x' \in E$ si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E \, \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

(Ceci signifie que tout $y \in F$ possède au plus un antécédent.

- C'est une surjection (ie f est surjective) si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ c'est-à-dire

$$\forall y \in F \; \exists x \in E \quad f(x) = y$$

(Ceci signifie que tout $y \in F$ possède au moins un antécédent

- C'est une bijection, (ie f est bijective) si f est en même temps une injection et une bijection

(i.e f est à la fois injective et surjective)

c'est à dire

$$\forall y \in F \ \exists! x \in E \quad f(x) = y$$

Ceci signifie que tout $y \in F$ possède un et un seul antécédent.

Expliquons pourquoi

$$\forall y \in F \ \exists! x \in E \quad f(x) = y$$

est équivalent

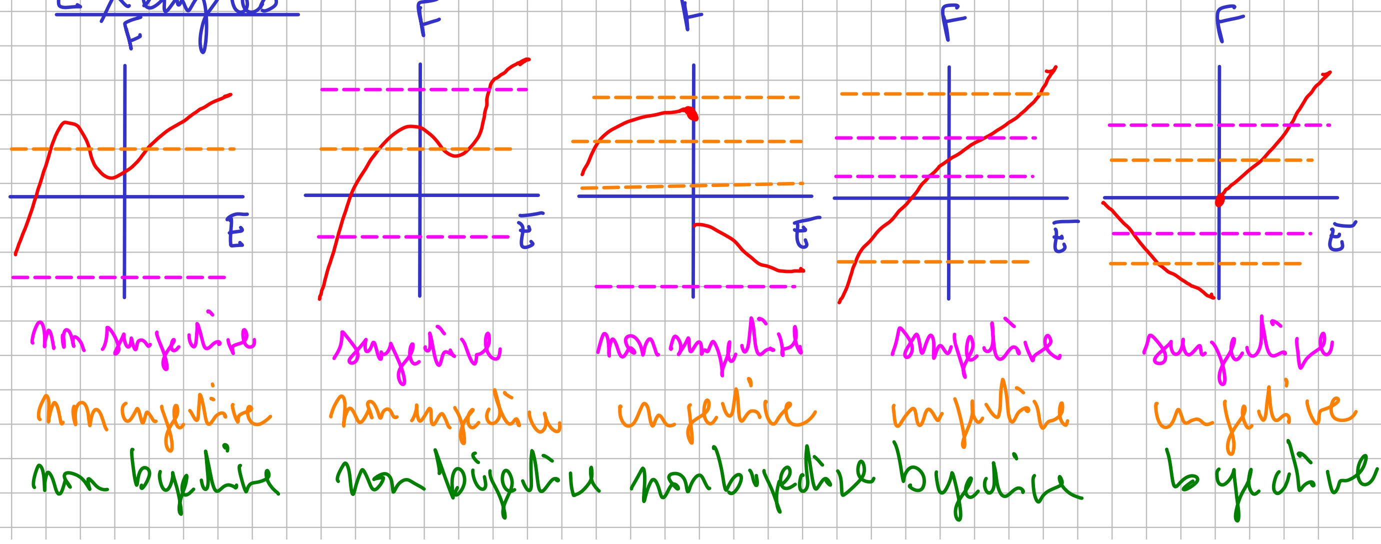
$$\left| \begin{array}{l} \forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \\ \text{et} \\ \forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y \end{array} \right.$$

Pour le comprendre on reformule l'injectivité. Elle se traduit

$$\forall y \in F \quad \forall x, x' \in E \quad \underbrace{f(x) = y \text{ et } f(x') = y \Rightarrow x = x'}$$

ceci traduit l'unicité c'est à dire le symbole !

Exemples



Exemples

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ bij
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x$ bij
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ non inj non surj
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2$ non inj non surj
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ bij
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^3$ inj non surj

Montrons qu'il n'existe pas un rationnel dont le cube vaut 2.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ p et q non tous les deux pairs tels que $\frac{p^3}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = x^3 = 2$

On a donc $p^3 = 2q^3$. Ainsi p est pair (car le produit de trois nombres impairs est impair)
il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2r$.

On a donc $8r^3 = (2r)^3 = p^3 = 2q^3$.

Ainsi $4r^3 = q^3$. Donc $2 \times (2r^3) = q^3$

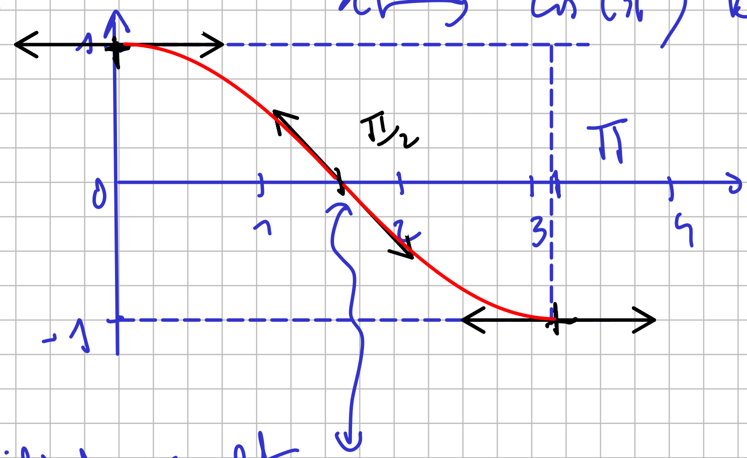
Ainsi 2 divise q^3 donc q pair.

La contradiction est que en même temps "p et q non tous les deux pairs" et "p est pair et q est pair"

- Autres exemples :
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ non surjective non injective
  - $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$ surjective non injective

• $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$
non surjective
injective

• $f : [0,\pi] \to [-1,1]$
$x \mapsto \cos(x)$ bijective



Ce retournement délicat résulte
$\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

Composition d'application.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors
on définit la composée $g \circ f$ de f par g
par si $x \in E$ $g \circ f(x) = g(f(x))$
Ainsi $g \circ f : E \to G$
$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$

Propriété Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$
alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Preuve. En effet si $x \in E$
alors $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x))$
$= h(g(f(x)))$
$= (h \circ g)(f(x))$
$= (h \circ g) \circ f(x)$.

Réciproque d'une bijection (ou inverse pour la composition)

Soit $f: E \to F$ bijective. Alors on définit la réciproque f^{-1} de f comme l'application $f^{-1}: F \to E$ qui à tout $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in E \ \forall y \in F \quad f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x}$

<u>Propriété</u> Soit $f: E \to F$ bijective. Alors

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Ceci signifie que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } x \in E \quad f^{-1} \circ f(x) = Id_E(x) = x \\ \text{si } y \in F \quad f \circ f^{-1}(y) = Id_F(y) = y \end{array}}$$

[Si X est un ensemble on note Id_X et on appelle identité de X l'application définie par $Id(x) = x$ si $x \in X$.
On l'appelle aussi application identité].

<u>Idée fausse à combattre</u> Soit $f: E \to F$ et $g: F \to E$ telles que $g \circ f = Id_E$. Ceci peut se produire sans que $f \circ g = Id_F$ et dans ce cas g et f ne sont pas réciproques.

Par exemple soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n|$

On a $g \circ f(n) = g(n) = n$ si $n \in \mathbb{N}$

mais $f \circ g(n) = f(|n|) = |n|$ si $n \in \mathbb{Z}$

et donc si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $f \circ g(n) = -n \neq n$

donc on a un exemple où

$g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g \neq Id_{\mathbb{Z}}$

Retour sur

" $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$ " $(*)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$. Alors

si on prend a quelconque dans $\mathbb{R}$

si on prend un intervalle ouvert quelconque mais non vide centré en $f(a)$

il existe un intervalle ouvert non vide centré en a

tel que si $x \in \mathbb{R}$ est x dans cet intervalle centré en a, x quelconque dans l'intervalle $]a-\eta, a+\eta[$

alors

$f(x)$ est dans le premier intervalle indiqué centré en $f(a)$ ($]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$)