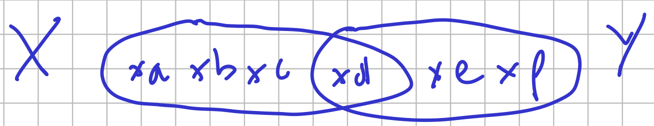
Pass options Maths et Info
CMP1
18/01/2023

- On peut voir que l'intersection est une opération commutative sur les ensembles

$\boxed{X\cap Y = Y\cap X \quad \text{quels que soient } X \text{ et } Y}$

- Ce n'est pas le cas de la différence

$\boxed{\text{il existe } X \text{ et } Y \text{ tels que } X\setminus Y \neq Y\setminus X}$



$X\setminus Y=\{a,b,c\}$ et $Y\setminus X=\{e,f\}$ et donc

$X\setminus Y\neq Y\setminus X$

On a $(X\setminus Y)\cap Y=\emptyset$ (1) et $(Y\setminus X)\cap X=\emptyset$ (2)

et $(X\setminus Y)\subset X\subset X\cup Y$ (3)

$(Y\setminus X)\subset Y\subset X\cup Y$ (4)

Supposons $(X\setminus Y)=(Y\setminus X)$.

D'après (1) et (4)

$(X\setminus Y)\cap Y=\emptyset$ (1) et

$(X\setminus Y)=(Y\setminus X)\subset Y$ (4)

D'après (4) $(X\setminus Y)\cap Y = X\setminus Y$.

et d'après (1) on a $X\setminus Y=(X\setminus Y)\cap Y=\emptyset$

Ainsi si $(X\setminus Y)=Y\setminus X)$ alors $X\setminus Y=\emptyset$

Le même raisonnement avec (2) et (3) donc $Y\setminus X=\emptyset$

On a si $X \setminus Y = \emptyset$ alors $X \subset Y$ et
si $Y \setminus X = \emptyset$ alors $Y \subset X$

On a donc $X \subset Y$ et $Y \subset X$ et par double inclusion ceci signifie que $X = Y$.

Conclusion $\boxed{\text{si } X \setminus Y = Y \setminus X \text{ alors } X = Y}$ (*)

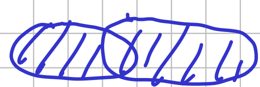
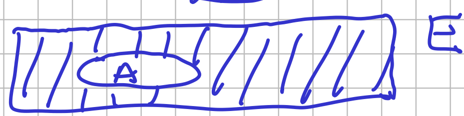
$\boxed{\text{Si } X \neq Y \text{ alors } X \setminus Y \neq Y \setminus X}$ (**)

Les propriétés (*) et (**) sont contraposées l'une de l'autre.

* La réunion $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B

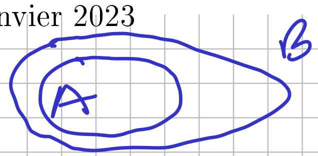
$\boxed{\text{On a bien } A \cup B = B \cup A \text{ quels que soient } A \text{ et } B \text{ ensembles}}$

Relation entre connecteurs logiques et ensembles

connecteur	ensembles
et	$A \cap B$ 
ou	$A \cup B$ 
non	$\complement_E A$ 

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$



C

$A = B$ double inclusion

Table de vérité

On considère des propriétés P et Q quelconques

Table du "et"

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

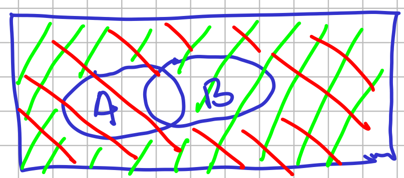
Table du "ou"

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table du "non"

P	non(P)
V	F
F	V

E



$A, B \subset E$ $\quad \complement_E\left(\complement_E^A \cap \complement_E^B\right) = A \cup B$

P	non P	Q	non Q	non(P) et non(Q)	non(non(P) et non(Q))
V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F

Ainsi

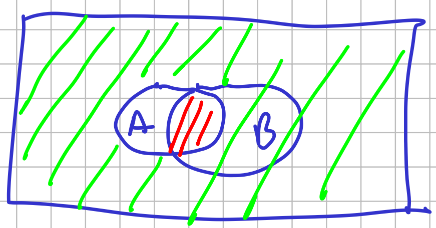
P	Q	non(non(P) et non(Q))
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On constate que la table de vérité de non (non(P) et non(Q)) est identique à la table de vérité du "ou".

Ceci signifie qu'en logique on peut se passer du considérer "ou" qui est remplaçable par " non (non(P) et non(Q))

Table de l'implication ⇒

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



$$\complement_E^A \cup (A \cap B) = \complement_E^A \cup B$$

les deux tables sont les mêmes

P	Q	non (P)	P et Q	non(P) ou (P et Q)
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

P	Q	non(P)	non(P) ou Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

mêmes tables de vérité.

Table de l'équivalence $\Longleftrightarrow$

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ce sont les mêmes tables de vérité.

Comparons cette table à $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Conclusion : les connecteurs "non" et "et" suffisent et permettent d'exprimer les connecteurs "ou", "implique" et "est équivalent".

Notations : • P et Q est noté $P \wedge Q$,
• P ou Q est noté $P \vee Q$,
• non (P) est noté $\overline{P}$.

Quantificateurs

• Dans une phrase mathématique on écrit "$\forall x$" au lieu de "Pour tout x" ou "Quel que soit x". Le symbole "$\forall$"

s'appelle quantificateur universel.

C'est un multiplicateur.

- Dans une phrase mathématique on écrit "$\exists x$" au lieu de "Il existe (au moins) un x" et on écrit "$\exists! x$" au lieu de "Il existe un élément seul x".

Le symbole "$\exists$" s'appelle quantificateur existentiel.

C'est encore un multiplicateur.

Devinette. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que signifie

"$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$" ?

Ceci signifie que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Application, composée, réciproque, injection, surjection, bijection</u>

<u>Application</u> Soit E, F deux ensembles.

Une application f de E dans F est une choix

- Un sous-ensemble $\mathcal{G}_f$ de $E \times F$ tel que si $x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$ tel que $(x,y) \in \mathcal{G}_f$.

c'est-à-dire
"$\forall x \in E \ \exists!\, y \in F \quad (x,y) \in \mathcal{G}_f$"

- "associer à chaque élément de E un et un seul élément de F
c'est-à-dire si x élément de E, on associe un et un seul élément de F noté $f(x)$.

- Dans la première définition on a utilisé la notion $E \times F$. C'est le produit cartésien de E par F et c'est l'ensemble des couples (x,y) avec $x \in E$ et $y \in F$.
L'ensemble $\mathcal{G}_f$ s'appelle le graphe de f.
- Dans la seconde définition si $x \in E$, $f(x)$ s'appelle l'image de x par f. Cette image est unique.