Pass options Maths et Info
CMP1
11/01/2023

Pourquoi si $E = \{1, \dots, n\}$ alors le cardinal de l'ensemble de ses parties (partie = sous ensemble) est 2^n ?

déf. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E = \{1, \dots, n\}$

Soit X, $X \in \mathcal{P}(E)$ (X est un élément de $\mathcal{P}(E)$)

si $X \subset E$ (X est un sous ensemble de E.

lecture
- L'expression "$X \boxed{\in} \mathcal{P}(E)$" se lit "X appartient à $\mathcal{P}(E)$"
- L'expression "$X \boxed{\subset} E$" se lit "X est inclus dans E"

Fonction caractéristique

Soit $X \subset E$ la fonction caractéristique de X notée $\mathbb{1}_X$ est définie

$\mathbb{1}_X(x) = 1$ si $x \in X$

$\mathbb{1}_X(x) = 0$ si $x \in E$ mais $x \notin X$

Exemple $E = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

- $X = \{\boxed{1}, \boxed{4}, \boxed{7}\}$

$$\mathbb{1}_X : \begin{array}{l} \boxed{1} \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 0 \\ 3 \longmapsto 0 \\ \boxed{4} \longmapsto 1 \\ 5 \longmapsto 0 \\ 6 \longmapsto 0 \\ \boxed{7} \longmapsto 1 \\ 8 \longmapsto 0 \\ 9 \longmapsto 0 \\ 10 \longmapsto 0 \end{array}$$

- $Y = \emptyset$

$\mathbb{1}_\emptyset$: si $x \in \{1, \dots, 10\}$ $\mathbb{1}_\emptyset(x) = 0$

- $Z = E$

$\mathbb{1}_E$: si $x \in \{1, \dots, 10\}$ $\mathbb{1}_E(x) = 1$

Avec l'indicatrice on associe à chaque sous-ensemble de E (c'est à dire à chaque élément de $\mathcal{P}(E)$) une fonction de E dans $\{0,1\}$.

On a $\mathbb{1}_X^{-1}(1) = \{x \in E \mid \mathbb{1}_X(x) = 1\}$

$= X$

$\mathbb{1}_X^{-1}(0) = \{x \in E \mid \mathbb{1}_X(x) = 0\}$

= le sous-ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans X.

Inversement si $f : E \to \{0,1\}$ une fonction définie sur E et à valeurs dans $\{0,1\}$ et si on pose $X = f^{-1}(1)$ alors $\mathbb{1}_X = f$

Par conséquent il y a exactement le même nombre d'éléments dans $\mathcal{P}(E)$ que de fonctions de E à valeurs dans $\{0,1\}$

Pour compter le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ il suffit de compter le nombre de fonctions de E dans $\{0,1\}$

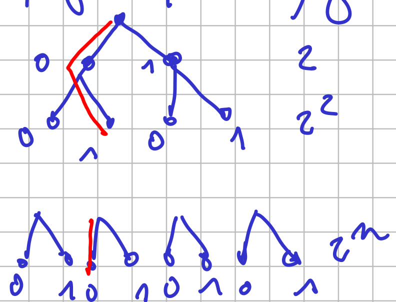
On détermine une fonction f de E dans $\{0,1\}$ en déterminant successivement $f(1), f(2), \dots, f(n)$

Pour $f(1)$ deux choix 0 ou 1

$f(2)$ deux choix 0 ou 1

⋮

$f(n)$ deux choix 0 ou 1



Le chemin rouge correspond à $f(1) = 0$ $f(2) = 1$ ... $f(n) = 0$

Pour construire la fonction f de cette façon on a 2^n possibilités qui donnent 2^n fonctions différentes et ce sont toutes les fonctions de E dans $\{1, \dots, n\}$.

On a indiqué la semaine dernière que

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) > \mathrm{Card}(E)$ car $2^n > n$

et que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ alors que $\mathrm{Card}(E) = n$.

Raisonnons dans l'autre sens.

$\mathrm{Card}(E) = n$ car $E = \{1, \dots, n\}$

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient comme élément

$\emptyset$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ .... $\{n\}$ donc

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) \geq n+1 > n = \mathrm{Card}(E)$

Or $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ Donc $\boxed{2^n > n}$

Que se passe-t-il si $n = 0$?

$E = \emptyset$ $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ $\boxed{\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}}$

$\mathrm{Card}\,\emptyset = 0$ $\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\emptyset) = \mathrm{Card}\,\{\emptyset\} = 1$.

On a bien $\boxed{2^0 = 1}$

Que se passe-t-il pour $\mathcal{P}(X)$ lorsque X est un ensemble infini ?

Montrons qu'il n'y a pas de bijection $f : X \to \mathcal{P}(X)$.
Plus précisément montrons que si $f : X \to \mathcal{P}(X)$
alors il existe $Y \in \mathcal{P}(X)$ [i.e. $Y \subset X$] tel que
pour tout $x \in X$ $f(x) \neq Y$

Considérons le sous-ensemble Y de X défini de la façon suivante :

$Y = \{x \in X \,|\, x \notin f(x)\}$
c'est le sous ensemble des éléments
"du type" x de X dont l'image $f(x)$ ne
contient pas x"

Montrons que si $x \in X$ alors $f(x) \neq Y$.
Raisonnons par l'absurde. On suppose
qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) = Y$.

- Si $x \in Y$ alors $x \notin f(x) = Y$. Il y a une contradiction donc l'hypothèse $x \in Y$ est fausse. Donc $x \notin Y$
- Mais dans ce cas, $x \notin Y = f(x)$ donc $x \notin f(x)$ et ceci signifie $x \in Y$. Il y a encore une contradiction

Ceci entraine que l'hypothèse $f(x) = Y$ est fausse.

Ainsi pour tout $x \in X$ $f(x) \neq Y$.
Par conséquent l'application $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
n'atteint pas tous les sous-ensembles de X.

Les connecteurs logiques.

Quand on raisonne en mathématiques
on combine des assertions (phrases mathématiques)
avec des connecteurs logiques.

et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, non

implique équivalent.

Ex "$(x \in \mathbb{N})$ et $\left(x < \frac{22}{7}\right)$" qui est équivalente

" $x \in \{0,1,2,3\}$ "

Ex " $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ "

Ceci est vrai si on se place dans les entiers naturels.
C'est faux si on se place dans les entiers relatifs
(car $x = -2 < 0$ mais $x^2 = 4 > 0$

Cette assertion parfois vraie, parfois fausse permet de définir un ensemble !

$X = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \} =]0, +\infty)$

- non ($x > 0$) est la négation de $x > 0$
  C'est $x \leq 0$

- non ($x^2 - 1 > 0$) est la négation de $x^2 - 1 > 0$
  c'est $x^2 - 1 \leq 0$

$X = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0 \} = (-\infty, -1[\cup]1, +\infty)$

$Y = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{non}(x^2 - 1 > 0) \}$
$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0 \} = [-1, 1]$

Remarque $\boxed{X \cup Y = \mathbb{R} \quad X \cap Y = \emptyset}$

union — l'ensemble des éléments qui sont dans X ou dans Y

"inter" — l'ensemble des éléments qui sont dans X et dans Y

X et Y sont complémentaires dans $\mathbb{R}$ $Y = \complement_{\mathbb{R}} X$ ou

$X = \complement_{\mathbb{R}} Y$.

On est en train de faire de la théorie des ensembles.

En maths il y a des objets appelés ensembles et des objets appelés éléments.

Les maths s'intéressent aux relations entre ces objets : $x \in X$, $Y \subset Z$

Exemple numéro 1 Le vide, $\emptyset$. C'est un ensemble qui ne contient aucun élément :

"$\forall x \quad x \notin \emptyset$" [Pour tout x élément, x n'est pas dans le vide]

Exemple numéro 2 Si X est un ensemble il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(X)$ et appelé ensemble des parties de X : $Y \in \mathcal{P}(X)$ si et seulement si $Y \subset X$ [$Y \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow Y \subset X$]

Par exemple $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, 1

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 2

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 4

Union, Intersection

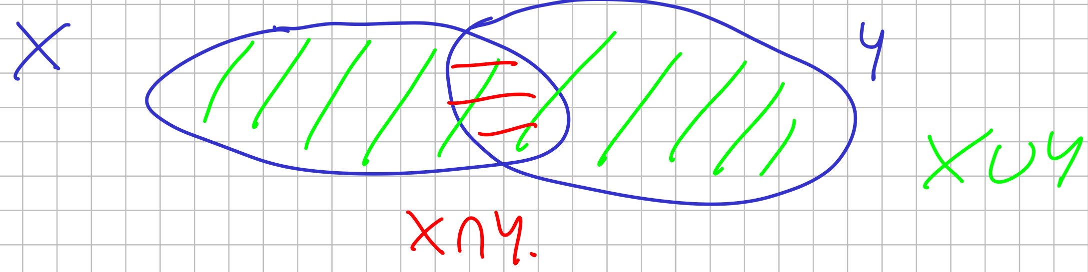
Soit X, Y deux ensembles.

La réunion $X \cup Y$ est caractérisée par

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ou } x \in Y\}$

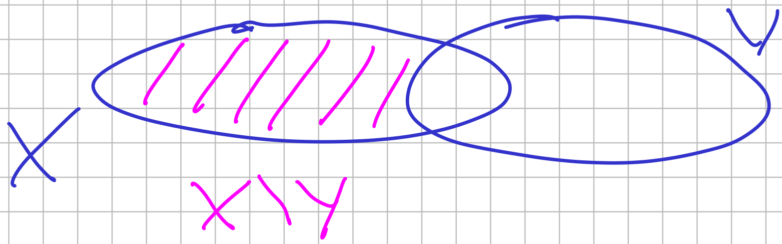
L'intersection $X \cap Y$ est caractérisée par

$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \in Y$

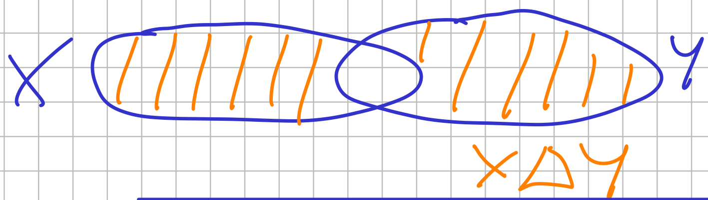


Différence de deux ensembles : La différence $X \setminus Y$ est définie par

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$$



La différence symétrique $X \Delta Y$ est définie $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$



<u>Pté</u> $\boxed{X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus X \cap Y}$

Pour montrer cette propriété d'égalité entre ensembles il faut et il suffit d'appliquer le principe suivant : Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement pour tout $x \in A$ on a $x \in B$ et pour tout $x \in B$ on a $x \in A$, c'est-à-dire $A \subset B$ et $B \subset A$. (Principe de double inclusion).