Pass options Maths et info
CMP1
04/01/2023

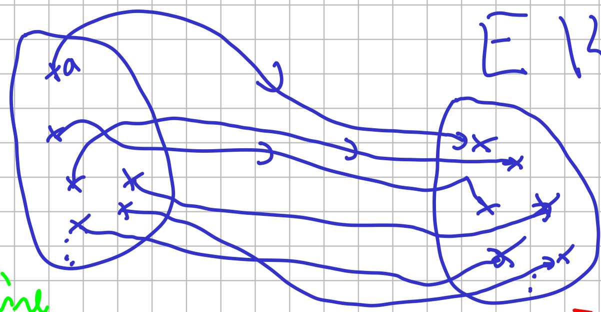
Qu'est ce qu'un ensemble fini ?

C'est un ensemble qui n'est pas infini !

Qu'est ce qu'un ensemble infini ?

Soit E un ensemble non vide. Il est infini s'il existe un élément a de E et une bijection f entre E et $E \setminus \{a\}$

$f : E$ $\quad\quad$ $E \setminus \{a\}$



bijection veut dire
Chaque fois qu'on prend un élément de $E \setminus \{a\}$ (noté y) il existe un et un seul élément de E (noté x) tel que $y = f(x)$
[f envoie x sur y]
(en tout y de $E \setminus \{a\}$ arrive une et une seule flèche)

f application veut dire
Pour tout x dans E
f envoie x sur un unique élément
(de tout x de E part une et une seule flèche)

Par exemple l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

est infini (avec cette définition) car

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$n \longmapsto n+1$$

est une bijection

Pour montrer que les ensembles qu'on imagine finis sont finis on fait une preuve par récurrence.

Raisonnement par récurrence.

On considère une famille de propriétés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Ceci signifie qu'à chaque entier naturel n est associé une propriété P_n.

Une façon de prouver que toutes les propriétés P_n sont vraies est de montrer que

1/ P_0 est vraie [initialisation]

2/ Quel que soit l'entier n considéré, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie [hérédité]

Si on sait prouver 1/ et 2/ alors On a prouvé que P_n est vraie pour tout n.

⚠ 2/ ne dit pas que P_n est vraie quel que soit n

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x^3$

Soit $a<0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$u_0 = a$ et si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n) = u_n^3$

Ainsi $u_0 = a$ $u_1 = a^3$ $u_2 = (a^3)^3 = a^9$ $u_3 = (a^9)^3 = a^{27}$

Montrons par récurrence sur n que $u_n = a^{(3^n)}$. (P_n)

Initialisation On a $u_0 = a = a^1 = a^{3^0}$ car $3^0 = 1$ donc P_0 est vrai.

Hérédité On n'écrit pas " Supposons que pour tout n P_n est vrai et montrons P_{n+1} " ou " Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}$ P_n vraie et montrons P_{n+1} "

On écrit.

|| Soit n un entier naturel fixé. On suppose P_n vraie.

Montrons P_{n+1}. L'hypothèse P_n vraie signifie que $u_n = a^{3^n}$. Calculons u_{n+1}

On a par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^3 = \left(a^{3^n}\right)^3$$
$$= a^{3^n} \times a^{3^n} \times a^{3^n}$$
$$= a^{3^n + 3^n + 3^n}$$
$$= a^{(3\times 3^n)}$$
$$= a^{3^{n+1}}$$

Ainsi on a prouvé P_{n+1} en supposant P_n vraie. Ceci prouve l'hérédité de P_n. Puisque P_0 est vraie on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Il n'était pas utile de supposer $a<0$. Ça marche si $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

On a $u_n = a^{3^n}$ si $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^3\ \forall n$.

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de termes strictement positifs.

On commence par prouver l'hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. On suppose que u_n est strictement positif. Alors

$u_{n+1} = (u_n)^3 = u_n \times u_n \times u_n > 0$ car c'est le produit de trois nombres (identiques) strictement positifs par hypothèse ($u_n > 0$).

Ceci prouve que la propriété annoncée est héréditaire. On s'intéresse à l'initialisation.

Si $a > 0$. Par définition $u_0 = a > 0$, la propriété est vraie au rang 0.

Si $a \leq 0$, sinon, $u_0 = a \leq 0$, la propriété est fausse au rang 0.

<u>Exercice</u> Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si $x \geq 0$ alors $(1+x)^n \geq n.x+1$

<u>Solution</u> On note P_n la propriété "si $x \geq 0$ alors $(1+x)^n \geq n.x+1$".

Prouvons par récurrence que les P_n, $n \in \mathbb{N}$ sont vraies.

<u>Initialisation</u> $(1+x)^0 = 1 = 0.x+1$ et donc

$$(1+x)^0 \geq 0.x+1$$

Ainsi P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose P_n vraie

ainsi si $x \geq 0$ on a $(1+x)^n \geq n.x+1$

on a donc $(1+x)^n \times (1+x) \geq (n.x+1) \times (1+x)$ car

on multiplie les deux termes de l'inégalité $(1+x)^n \geq n.x+1$

par $1+x \geq 0$ (car $x \geq 0$)

Or $(1+x)^n \times (1+x) = (1+x)^{n+1}$

et $(n.x+1)(1+x) = nx + nx^2 + 1 + x$

$$= (n+1)x + 1 + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq (n+1)x + 1$$

Finalement on a $(1+x)^{n+1} = (1+x^n) \times (1+x) \geq (n.x+1) \times (1+x) \geq (n+1)x+1$

c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geq (n+1).x+1$

et donc P_{n+1} est vraie si P_n est vraie.

Conclusion. Puisque P_0 est vraie et que P_n est héréditaire

P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ceci signifie que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ on a

$$(1+x)^n \geq n.x+1$$

<u>Application au dénombrement.</u>

Soit $E = \{1, \dots, n\}$. On a $\mathrm{Cardinal}(E) = n$: E possède n éléments.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. C'est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots \{n\},$
$\{1,2\} \ldots \{3,n\} \ldots , E\}$

Il y a 2^n sous-ensembles de E c'est-à-dire
$\text{Cardinal}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Si on croit à cette affirmation on a que

$$\text{Cardinal}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = (1+1)^n \geq n \cdot 1 + 1 \geq n+1 > n$$

et donc $\text{Cardinal}(\mathcal{P}(E)) > n = \text{Cardinal}(E)$.

Donc un ensemble (en tout cas un ensemble fini) contient moins d'éléments que de parties.