

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Contrôle continu 0.1 - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Soit X un ensemble qui est défini par les conditions suivantes :

1/ $X \subset \mathbf{N} \times \mathbf{Z}^-$;

2/ si $(x, y) \in X$ alors $x^2 + y^2 \leq 17$;

3/ si $(x, y) \in X$ alors $9 \times |x| \leq 4 \times |y|$.

Donner tous les éléments de X .

2/ Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que f vérifie la propriété (*) suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \forall y \in \mathbf{R}^+ \quad x < y \implies 0 \leq f(y) - f(x) < \frac{1}{\sqrt{y-x}}.$$

1/ Écrire en langage courant cette propriété (*).

2/ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $0 \leq f(n) < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3/ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $x \in]0, n[$ alors $0 \leq f(x) \leq f(n)$.

4/ Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x > 0$. On note n le plus grand des deux entiers naturel $1 + \text{partie entière de } x$ et $1 + \text{partie entière de } \frac{1}{\varepsilon^2}$. L'entier n vérifie $n > x$ et $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Montrer que $0 \leq f(x) < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

5/ Montrer que $f(x) = 0$.

3/ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si x est un réel strictement positif alors $(1+x)^n \geq 1+nx$.