Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Résumé des séances

L'enseignement de CMP1 repose sur un document pdf appelé cmp1-2021-2022.pdf et accessible dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont aussi accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

13/12. Dans une première partie de la séance les ensembles de nombres, **N**, **Z**, **D**, **Q** et **R** sont présentés.

Dans une seconde partie des éléments de logique sont donnés., en particulier les notions de prédicats, de connecteurs et de tables de vérité sont examinées.

14/12. On explique quelques principes de raisonnement déduits des treize règles qui fondent le raisonnement (raisonnement par contraposée, tiers exclu, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence). Ce cours est aussi l'occasion de prouver que la racine carrée de 2 n'est pas un nombre rationnel et que la somme des n premiers entiers naturels non nuls vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. L'utilisation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est expliquée. Elle est illustrée par la définition quantifiée de fonction continue mais aussi par la propriété de borne inférieure que vérifie l'ensemble des réels.

05/01. Les dix axiomes de la théorie des ensembles (Zermelo-Fraenkel et axiome du choix) sont présentés et illustrés.

12/01. On examine différentes notions liées aux ensembles comme l'inclusion, l'ensemble des parties d'un ensemble, la différence, le complémentaire, la différence symétrique, l'intersection, la réunion, la définition par compréhension d'un sous-ensemble, les couples, les n-uplets, le produit cartésien de plusieurs ensembles, la projection d'un sous-ensemble d'un produit cartésien.

On démontre que l'ensemble des parties d'un ensemble qui possède n éléments possède 2^n éléments.

On explique comment numéroter les entiers relatifs, les éléments de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et on en déduit qu'on peut numéroter les rationnels. On indique que les réels ne peuvent pas être numérotés.

Les notes de cours on été corrigées et complétées page 10 quand est expliqué succinctement comment numéroter les rationnels.

19/01. On finit d'expliquer comment numéroter les rationnels. C'est l'occasion d'expliquer qu'en associant à chaque couple (i, j) d'entiers naturels le nombre $\frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + 1 + j$ on numérote tous les éléments de $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ en utilisant tous les entiers naturels non nuls. Ceci signifie que si d'une part $(i,j)\neq(i',j')$ sont deux couples différents d'entiers naturels alors $\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+1+j$ est différent de $\frac{(i'+j')(i'+j'+1)}{2}+1+j'$ et d'autre part si n est un entier naturel non nul alors il existe $(i,j)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ tel que $n=\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+1+j$. On donne la construction de Cantor qui permet de montrer qu'on ne peut pas numéroter les réels (sans en oublier).

Dans une seconde partie on définit via la notion de graphe ce qu'est une application et on explique la notion de composée de deux applications.

26/01. Après avoir repris les définitions d'application (et d'image d'un élément ou d'un sous-ensemble, d'antécédent d'un élément ou d'un sous-ensemble, d'ensemble de départ, d'ensemble d'arrivée) et de composée d'applications, l'associativité de la composition est énoncée.

Après avoir décrit l'ensemble $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et défini l'addition et la multiplication dans cet ensemble, la notion d'indicatrice (à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) est expliquée. Il est en particulier montré que si X et Y sont deux sous-ensembles d'un ensemble E alors $\mathbf{1}_X\times\mathbf{1}_Y=\mathbf{1}_{X\cap Y}$ et $\mathbf{1}_X+\mathbf{1}_Y=\mathbf{1}_{X\cup Y}$.

Les notions d'injection (application injective), de surjection (application surjective) et de bijection (application bijective) ainsi que celle de réciproques (d'inverses pour la composition) sont présentées et il est énoncé que la composée de deux injections (surjections, bijections) est une injection (surjection, bijection). Divers exemples sont donnés.

La séance se termine en prouvant que quel que soit l'ensemble X il n'existe pas de bijection de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de ses parties.

09/02. Après avoir expliqué la nuance entre les notions de fonction et d'application et introduit le concept de domaine de définition d'une fonction sont présentées les notions de restriction, de prolongement, de co-restriction et de co-prolongement.

Une définition d'ensemble fini qui fait appel à l'existence d'une bijection (avec un sous-ensemble du type $\mathbf{N}_n=\{1,...,n\}=\{k\in\mathbf{N}|0<k\leq n\}$ où $n\in\mathbf{N}$) est expliquée. Les propriétés des ensembles finis et de leur cardinaux sont étudiées rapidement.

La fin de la séance est consacrée a une démonstration du théorème de Cantor Bernstein qui dit qu'il existe une bijection entre deux ensembles E et F s'il existe une injection de E dans F et une seconde injection de F dans E.

02/03. Après avoir donné quelques éléments de réponse pour l'exercice 4 du contrôle continu on consacre l'intégralité de la séance aux définitions et à l'utilisation des symboles $\sum$ et $\prod$. De nombreux exemples sont étudiés. C'est l'occasion d'établir la formule du binôme de Newton et les relations entre les coefficients du binôme : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$. C'est aussi l'occasion de donner des définitions formelles de la factorielle et des puissances, en utilisant $\prod$ à chaque fois.

09/03. Après avoir défini et illustré la notion de partition d'un ensemble on traite des questions classiques de dénombrement (nombre d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments, nombre de partie d'un ensemble à n éléments, nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments, nombre de façon d'ordonner un ensemble à n éléments, nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments, relations avec le binôme de Newton). C'est aussi l'occasion de travailler la notion d'indicatrice d'un sous-ensemble d'un ensemble.

23/03. La séance (double) a été consacrée à la résolution de douze exercices du recueil d'exercices associés à cet enseignement et accessible en ligne.

30/03. La séance a été consacrée à la résolution de six exercices du recueil d’exercices associés à cet enseignement et accessible en ligne.

06/04. La séance a été consacrée à la résolution de six exercices du recueil d’exercices associés à cet enseignement et accessible en ligne.