Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Contrôle continu 2 - 45 minutes

Traiter au choix trois exercices.

Les réponses sont justifiées.

1/ On suppose que $|x-1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes :

$$1)\ x+y \qquad 2)\ x-y \qquad 3)\ xy \qquad 4)\ \frac{x}{y} \qquad 5)\ |x|-|y|.$$

2/ Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les prédicats suivants à l'aide de quantificateurs et donner leur négation :

- L'application f n'est pas de signe constant sur I.
- L'application f est majorée sur I.
- L'intervalle I est inclus dans $]1,2[$.

3/ Soient a et b deux réels tels que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad a < b + \varepsilon)$.

Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, qu'alors $a \leq b$.

4/ On suppose que les sous-ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 forment une partition de l'ensemble E. Donner toutes les partitions de E avec des sous-ensembles qui sont des réunions de certains des A_i ?

5/ Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $f(x) = x/(1+|x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

6/ Monter par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 2 (CMP2)

Matrices et systèmes linéaires

Contrôle continu 2 - 45 minutes

1/ On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a. Trouver les deux valeurs λ telles qu'il existe des vecteurs non nuls X pour lesquels on ait
$$AX = \lambda X.$$

b. Trouver un vecteur propre associé à chacune des deux valeurs propres trouvées dans la question précédente.

c. En déduire une matrice P telle que
$$P^{-1}AP$$
soit une matrice diagonale. Calculer P^{-1} et vérifier que $P^{-1}AP$ est bien diagonale.

2/ Trouver une matrice B telle que
$$B \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3/ Soit α un nombre réel. On considère la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que, si α n'est pas nul, la matrice T est inversible (en calculant son inverse ; méthode imposée).

b. Soit X le vecteur
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer le produit TX. Montrer que, si α est nul, T n'est pas inversible (raisonner par l'absurde).