Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Contrôle continu blanc 1 - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Soit X un ensemble qui est défini par les conditions suivantes :

1/ $X \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$;

2/ si $(x,y) \in X$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$;

3/ si $(x,y) \in X$ alors $x^2 < 10 \times y$.

Donner tous les éléments de X.

Puisque $X \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (condition 1/) l'ensemble X est un ensemble de couples d'entiers naturels. On cherche donc tous les $(x,y) \in \mathbf{N}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leq 100$ (condition 2/) et $x^2 < 10 \times y$ (condition 3/).

Nécessairement $x \leq 10$ et $y \leq 10$ car si ce n'est pas le cas alors $x^2 + y^2 > 100$.

Si $x = 0$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 10$ et $x^2 < 10 \times y$ à $1 \leq y \leq 10$: les couples $(0,y) \in X$ sont

$$(0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (0,4),\ (0,5),\ (0,6),\ (0,7),\ (0,8),\ (0,9),\ (0,10).$$

Si $x = 1$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 9$ et $x^2 < 10 \times y$ à $1 \leq y \leq 10$: les couples $(1,y) \in X$ sont

$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (1,7),\ (1,8),\ (1,9).$$

Si $x = 2$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 9$ et $x^2 < 10 \times y$ à $1 \leq y \leq 10$: les couples $(2,y) \in X$ sont

$$(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (2,7),\ (2,8),\ (2,9).$$

Si $x = 3$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 9$ et $x^2 < 10 \times y$ à $1 \leq y \leq 10$: les couples $(3,y) \in X$ sont

$$(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (3,7),\ (3,8),\ (3,9).$$

Si $x = 4$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 9$ et $x^2 < 10 \times y$ à $2 \leq y \leq 10$: les couples $(4,y) \in X$ sont

$$(4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (4,7),\ (4,8),\ (4,9).$$

Si $x = 5$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 8$ et $x^2 < 10 \times y$ à $3 \leq y \leq 10$: les couples $(5, y) \in X$ sont

$$(5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\ (5,7),\ (5,8).$$

Si $x = 6$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 8$ et $x^2 < 10 \times y$ à $4 \leq y \leq 10$: les couples $(6, y) \in X$ sont

$$(6,4),\ (6,5),\ (6,6),\ (6,7),\ (6,8).$$

Si $x = 7$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 7$ et $x^2 < 10 \times y$ à $5 \leq y \leq 10$: les couples $(7, y) \in X$ sont

$$(7,5),\ (7,6),\ (7,7).$$

Si $x = 8$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 6$ et $x^2 < 10 \times y$ à $7 \leq y \leq 10$: X ne contient aucun couple de la forme $(8, y)$.

Si $x = 9$ alors $x^2 + y^2 \leq 100$ est équivalent à $0 \leq y \leq 4$ et $x^2 < 10 \times y$ à $9 \leq y \leq 10$: X ne contient aucun couple de la forme $(9, y)$.

L'ensemble X est formé des 59 couples indiqués.

2/ Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. On dit que f vérifie la propriété $(*)$ si

$$\forall x \in [0,1] \forall y \in [0,1]\ |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$$

1/ Écrire en langage courant cette propriété.

Une fonction numérique f définie sur $[0,1]$ vérifie $(*)$ si pour tout nombre x dans $[0,1]$ et pour tout nombre y dans $[0,1]$ la valeur absolue $|f(x) - f(y)|$ de la différence entres les valeurs de f en x et en y est inférieure ou égale au double de la valeur absolue $|x - y|$ de la différence entre x et y.

2/ Vérifier que la fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 3x$ si $x \in [0,1]$ ne vérifie pas $(*)$.

Prenons $x = 0$ et $y = 1$. Alors $|f(0) - f(1)| = |0 - 3| = 3$ et $2|0 - 1| = 2$. Puisque $3 > 2$ il vient $|f(0) - f(1)| > |0 - 1|$. Par conséquent $(*)$ n'est pas vérifiée par f.

3/ Montrer que si $x, y \in [0,1]$ alors $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$ et que $|x + y| \leq 2$.

Soient $x, y \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
(x+y) \times (x-y) &= x \times (x-y) + y \times (x+y) \quad \text{(distributivité de } \times \text{ par rapport à +)} \\
&= x^2 - x \times y + x \times y + y^2 \quad \text{(distributivité de } \times \text{ par rapport à +)} \\
&= x^2 - y^2 \quad (-x \times y + y \times x = 0).
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$.

Puisque $x, y \in [0,1]$ on a $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$. En additionnant il vient $0 \leq x + y \leq 2$. Donc, puisque $x + y$ est positif ou nul, $x + y = |x + y|$ et par conséquent l'inégalité $|x + y| \leq 2$ est vraie..

4/ Vérifier que la fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [0,1]$ vérifie $(*)$.

Soient $x, y \in [0,1]$. On a $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$ et donc $|x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| = |x + y| \times |x - y|$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\
&= |x + y| \times |x - y| \\
&\leq 2|x - y|
\end{aligned}$$

car on a $|x+y| \leq 2$. Ceci prouve que f vérifie $(*)$.

3/ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si x est un réel strictement positif alors $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Pour prouver par récurrence la propriété annoncée il suffit de vérifier qu'elle est vraie au rang 0 (initialisation) et qu'elle est héréditaire.

Initialisation. Si $x \in 0$ alors $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1+0x$. La propriété est bien vraie au rang 0, le rang initial.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que la propriété est vraie au rang n et prouvons la au rang $n+1$. Soit donc $x > 0$. Par hypothèse de récurrence $(1+x)^n \geq 1+nx$. Puisque $x > 0$ on a $1+x > 1 > 0$ et puisque $n \in \mathbf{N}$ et $x > 0$, on a $1+nx \geq 1 > 0$. Donc, en multipliant ces inégalités entre termes positifs, il vient

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (a+x)^n \times (1+x) \\
&\geq (1+nx) \times (1+x) \\
&\geq 1+nx+x+nx^2 \\
&\geq 1+nx+x \text{ car } nx^2 \geq 0 \\
&\geq 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

et donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ si $x > 0$. La propriété est donc bien héréditaire.

La propriété annoncée est donc vraie au rang 0 (initialisation) et elle est héréditaire. Ceci établit par récurrence qu'elle est vraie.