

## Compléments maths PASS 1 (CMP1)

### *Raisonnement et vocabulaire ensembliste*

### Contrôle continu 1 - 45 minutes

Traiter au choix trois exercices.

Les réponses sont justifiées.

1/ Soit  $X$  un ensemble qui est défini par les conditions suivantes :

- $X \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ;
- si  $(x, y) \in X$  alors  $x^2 + y^2 \leq 9$ ;
- si  $(x, y) \in X$  alors  $3 \times x \leq 2 \times y$ .

Donner tous les éléments de  $X$ .

2/ Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ . On dit que  $f$  vérifie la propriété (\*) si

$$\forall x \in [0, 1] \forall y \in [0, 1] |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

- Écrire en langage courant cette propriété.
- Montrer que si  $x, y \in [0, 1]$  alors  $\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x-y}{1+x+y+xy}$  et que  $1+x+y+xy \geq 1$ .
- Vérifier que la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  si  $x \in [0, 1]$  vérifie (\*).

3/ Montrer par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$  que

- $2n \geq n$ ;
- $2^n \geq 1 + n$ .

4/ Donner la liste des couples  $(X, Y)$  de sous-ensembles de l'ensemble à cinq éléments  $Z = \{a, b, c, d, e\}$  formés de sous-ensembles à trois éléments dont la réunion  $X \cup Y$  est  $Z$ .

5/ Soit  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ .

- La fonction  $f$  est-elle injective ?
- La fonction  $f$  est-elle surjective ?
- La fonction  $f$  est-elle bijective ?