Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Contrôle continu blanc 2 (2) - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si quel que soit $X \subset E$ on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

On suppose f injective et soit $X \subset E$.

Si $x \in X$ alors $x \in f^{-1}(\{f(x)\}) \subset f^{-1}(f(X))$ car $\{f(x)\} \subset f(X)$, et donc $x \in f^{-1}(f(X))$. Comme c'est vrai pour tout $x \in X$ on a $X \subset f^{-1}(f(X))$.

Si $x \in f^{-1}(f(X))$ alors il existe $y \in f(X)$ tel que $f(x) = y$. Comme $y \in f(X)$, il existe $x' \in X$ tel que $f(x') = y = f(x)$. Puisque f est injective $x = x'$ et donc $x \in X$. Comme c'est vrai pour tout $x \in f^{-1}(f(X))$ on a $f^{-1}(f(X)) \subset X$.

On vient de prouver par double inclusion que si f est injective alors quel que soit $X \subset E$ on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

Prouvons maintenant la réciproque. On suppose que quel que soit $X \subset E$ on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On a donc

$$\begin{aligned}\{x\} &= f^{-1}(f(\{x\})) \text{ (d'après l'hypothèse "quel que soit } X \subset E \text{ on a } f^{-1}(f(X)) = X\text{")}\\ &= f^{-1}(f(\{x'\})) \text{ (d'après l'hypothèse "} f(x) = f(x') \text{")}\\ &= \{x'\} \text{ (d'après l'hypothèse "quel que soit } X \subset E \text{ on a } f^{-1}(f(X)) = X\text{")}\end{aligned}$$

et donc $x = x'$. Ainsi l'égalité $f(x) = f(x')$ entraîne l'égalité $x = x'$ quels que soient $x, x' \in E$.

On vient de prouver que si quel que soit $X \subset E$ on a $f^{-1}(f(X)) = X$ alors f est injective.

On vient d'établir par double implication que f est injective si et seulement si quel que soit $X \subset E$ on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

2/ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers naturels qui vérifie la propriété suivante. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $u_n < u_{n+1}$. Montrer par récurrence que si $n \in \mathbf{N}$ alors $n \leq u_n$.

Pour prouver la propriété annoncée par récurrence il suffit de la vérifier au rang 0 et de montrer qu'elle est héréditaire c'est à dire que si elle est vraie à un rang quelconque donné elle est aussi vraie au rang suivant.

Vérification au rang 0. Puisque u est une suite d'entiers naturels, $u_0 \in \mathbf{N}$ et donc $0 \leq u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

Preuve de l'hérédité. Soit n un entier naturel. Supposons que la propriét est vraie au rang n c'est à dire que $n \leq u_n$. Puisque par hypothèse on a $u_n < u_{n+1}$ il vient $n \leq u_n < u_{n+1}$ et donc $n < u_{n+1}$. Or u_{n+1}

est un entier naturel. Puisqu'il est strictement plus grand que n il est supérieur ou égal à $n+1$ et donc $n+1 \leq u_{n+1}$. On vient de prouver que si $n \leq u_n$ alors $n+1 \leq u_{n+1}$. La propriété est bien héréditaire.

3/ Existe-t-il un ensemble X qui vérifie :
- $X \subset \mathbf{R}^+$,
- $X \cap [0,2[= \{0\}$,
- $X \cap]0,+\infty) \neq \emptyset$,
- $\forall x \in \mathbf{R}\ (x \in X \Longrightarrow \frac{x}{2} \in X)$?

Supposons qu'un tel X existe et montrons que cette hypothèse mène à une contradiction.

Puisque $X \subset \mathbf{R}^+$ et que $X \cap [0,2[= \{0\}$, on a $0 \in X$ et $X \setminus \{0\} \subset [2,+\infty)$.

Puisque $X \setminus \{0\} \subset [2,+\infty)$ et $X \cap]0,+\infty) \neq \emptyset$, il existe $a \in X \cap [2,+\infty)$.

Puisque $a \in X$ et que $\forall x \in \mathbf{R}\ (x \in X \Longrightarrow \frac{x}{2} \in X)$, on a $\frac{a}{2} \in X$ et plus généralement $\frac{a}{2^n} \in X$ si $n \in \mathbf{N}$.

Ceci se montre de façon rigoureuse par récurrence : puisque $\frac{a}{2^0} = a \in X$, cette propriété est vraie au rang 0 et, puisque si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $x = \frac{a}{2^n} \in X$ alors $\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{x}{2} \in X$, elle est héréditaire.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $a \leq n$. Alors $0 < 2 \leq a \leq n$. Donc $n \leq 2^n$ car 2^n est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments et il est donc au moins égal au nombre n de singletons de cet ensemble. Par conséquent $0 < \frac{2}{2^n} \leq \frac{a}{2^n} \leq \frac{a}{n} \leq 1$.

Ainsi, d'une part $\frac{a}{2^n} \in]0,1] \subset]0,2[$ et d'autre part $\frac{a}{2^n} \in X$. Ça contredit le fait que $X \setminus \{0\} \subset [2,+\infty)$.

Puisqu'on a obtenu une contradiction l'hypothèse selon laquelle un tel X est fausse. Par conséquent il n'existe pas un ensemble X vérifiant les propriétés annoncées.