Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Contrôle continu blanc 2 (1) - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Donner la liste complète des partitions de $\{1,2,3,4,5,6\}$ formées de sous-ensembles à deux éléments.

$\{1,2\}$ $\{3,4\}$ $\{5,6\}$ # $\{1,2\}$ $\{3,5\}$ $\{4,6\}$ # $\{1,2\}$ $\{3,6\}$ $\{4,5\}$
$\{1,3\}$ $\{2,4\}$ $\{5,6\}$ # $\{1,3\}$ $\{2,5\}$ $\{4,6\}$ # $\{1,3\}$ $\{2,6\}$ $\{4,5\}$
$\{1,4\}$ $\{3,2\}$ $\{5,6\}$ # $\{1,4\}$ $\{3,5\}$ $\{2,6\}$ # $\{1,4\}$ $\{3,6\}$ $\{2,5\}$
$\{1,5\}$ $\{3,4\}$ $\{2,6\}$ # $\{1,5\}$ $\{3,2\}$ $\{4,6\}$ # $\{1,5\}$ $\{3,6\}$ $\{4,5\}$
$\{1,6\}$ $\{3,4\}$ $\{5,2\}$ # $\{1,6\}$ $\{3,5\}$ $\{4,2\}$ # $\{1,6\}$ $\{3,2\}$ $\{4,5\}$

2/ a) Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)\times(a+b)$ avec $a = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $b = \dfrac{n(n-1)}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)\\ &= n^2 \times n\\ &= n^3\end{aligned}$$

et ceci établit l'égalité

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

b) En utilisant la question a) et en raisonnant par récurrence, montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour prouver par récurrence la propriété annoncée il suffit de montrer qu'elle est vraie au rang 0 (vérification au rang initial) et de montrer son hérédité, à savoir que si elle est vraie à un rang quelconque donné elle est vraie au rang suivant.

Vérification au rang 0. Par définition

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} k^3 &= 0\\ &= \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

et donc la propriété est bien vraie au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier quelconque. On suppose que la propriété est vraie en rang n, c'est à dire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)}\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2\right) \text{ (d'après a) avec } n+1 \text{ et non } n)\\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

et donc la propriété est vraie au rang $n+1$ pourvu qu'elle soit vraie au rang n : l'hérédité de la propriété est établie.

3/ Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ de la façon suivante. Si $k \in \mathbf{Z}$ vérifie $k \geq 0$, c'est à dire si $k \in \mathbf{N}$ alors $f(k) = 2k$ et si $k \in \mathbf{Z}$ vérifie $k < 0$, c'est à dire si $k \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ alors $f(k) = -2k-1$.

1/ Montrer que f est injective.

On considère $k, k' \in \mathbf{Z}$ tels que $f(k) = f(k')$. Quitte à permuter k et k' on peut supposer $k \leq k'$.

On va discuter suivant les signes de k et k'.

Si $0 \leq k \leq k'$ alors on a $2k = f(k) = f(k') = 2k'$ et donc en divisant par 2 on obtient $k = k'$.

Si $k \leq k' < 0$ alors on a $-2k-1 = f(k) = f(k') = -2k'-1$ et donc par addition de 1 puis par division par -2 on obtient $k = k'$.

Si $k < 0 \leq k'$ alors $f(k) = -2k-1$ est impair alors que $f(k') = 2k'$ est pair. Par conséquent l'hypothèse $f(k) = f(k')$ est contredite. Deux entiers de signes différents n'ont pas la même image par f.

On vient de montrer que si deux entiers relatifs ont la même image par f ils sont confondus. Ceci signifie que f est injective.

2/ Montrer que f est surjective.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si n est pair alors il existe $l \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2l$. Si on pose $k = l$ alors on a $k \in \mathbf{N}$ et donc $f(k) = 2k = 2l = n$. Si n n'est pas pair alors n est impair et il existe $l \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2l+1$. Si on pose $k = -l-1$ alors $k \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ et donc $f(k) = -2k-1 = -2 \times (-l-1) - 1 = (2l+2) - 1 = 2l+1 = n$
Ainsi tout entier naturel n a au moins un antécédent par f. Ceci signifie que f est injective