Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2020-2021

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Contrôle continu blanc 1 - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Décrire toutes les partitions possibles de $\{1,2,3,4\}$.

Les partitions de $\{1,2,3,4\}$ sont :

\# $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$
\# $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3,4\}$ # $\{1\}$, $\{3\}$, $\{2,4\}$ # $\{1\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$
\# $\{1\}$, $\{2,3,4\}$
\# $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,4\}$ # $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$
\# $\{2\}$, $\{1,3,4\}$
\# $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$
\# $\{3\}$, $\{1,2,4\}$
\# $\{4\}$, $\{1,2,3\}$
\# $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ # $\{1,3\}$, $\{2,4\}$ # $\{1,4\}$, $\{2,3\}$
\# $\{1,2,3,4\}$

2/ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels qui vérifie la propriété suivante :

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

1/ Écrire en langage courant cette propriété.

Il existe un entier naturel N tel que pour tout réel strictement positif ε et pour tout entier naturel n, si n est supérieur ou égal à N alors la valeur absolue du terme u_n est strictement inférieure à ε.

2/ Vérifier que la suite constante égale à 0 vérifie cette propriété.

Considérons $N = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors si $n \in \mathbf{N}$ on a d'une part $n \geq 0 = N$ et d'autre part $u_n = 0$ et donc $|u_n| < \varepsilon$. Ceci montre que la suite u vérifie bien la propriété.

3/ Est-il possible que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{1+n}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$?

Non. En effet si $N \in \mathbf{N}$ et si on pose $\varepsilon = \dfrac{1}{1+N}$ et $n = N$ alors on a $n \geq N$ et $|u_n| = \varepsilon$ donc $|u_n| \geq \varepsilon$. Ceci signifie que

$$\forall N \in \mathbf{N},\ \exists \varepsilon > 0 \text{ (prendre } \varepsilon = \frac{1}{1+N}\text{)},\ \exists n \in \mathbf{N} \text{ (prendre } n = N\text{)},\ n \geq N \text{ et } |u_n| \geq \varepsilon$$

est vraie et donc sa négation

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n| < \varepsilon$$

est fausse.

3/ Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose

- $A \cup B \cup C = E$,
- $A \setminus B \subset C$ et $B \setminus A \subset C$,
- $B \setminus C \subset A$ et $C \setminus B \subset A$,
- $C \setminus A \subset B$ et $A \setminus C \subset B$.

A-t-on $A = B = C = E$?

Non pas nécessairement. Considérons par exemple $A = \{2,3\}$, $B = \{3,1\}$, $C = \{1,2\}$ et $E = \{1,2,3\}$. Alors

- $A \cup B \cup C = \{2,3\} \cup \{3,1\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\} = E$,
- $A \setminus B = \{2,3\} \setminus \{3,1\} = \{2\} \subset \{1,2\} = C$ et $B \setminus A = \{3,1\} \setminus \{2,3\} = \{1\} \subset C$,
- $B \setminus C = \{3,1\} \setminus \{1,2\} = \{3\} \subset \{2,3\} = A$ et $C \setminus B = \{1,2\} \setminus \{3,1\} = \{2\} \subset A$,
- $C \setminus A = \{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\} \subset \{3,1\} = B$ et $A \setminus C = \{2,3\} \setminus \{1,2\} = \{3\} \subset B$

mais ces quatre ensembles A, B, C et E sont deux à deux différents.