Université de Rennes 1
UFR Mathmatiques
MIPE L1, Module A01

Année 2006-2007

Feuille d'exercices 9

Exercice 1 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 2. Soit ϕ l'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = \phi(M)$ d'affixe Z' définie par :

$$Z' = \frac{3+\sqrt{3}i}{4} Z + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

(a) Déterminez :

(i) L'affixe de l'image $\phi(A)$ du point A.

(ii) L'affixe du point P tel que $\phi(P) = 0$.

(b) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de ϕ.

(c) Lorsque le point M est distinct du point A :

(i) Démontrez que le triangle AMM', avec $M' = \phi(M)$, est rectangle en M'. Précisez les angles du triangle AMM'.

(ii) Le point M étant donné, déduisez-en une construction au compas du point M'.

Exercice 2 Supposons que $ABCD$ est un quadrilatère et que α est un complexe de module r et d'argument θ. Soient a, b, c, d les affixes de A, B, C, D dans un plan muni d'un repère orthonormal direct.

Supposons :
- la similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q.
- la similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M.
- la similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N.
- la similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P.

On appellera $q, m, n,$ et p les affixes de $Q, M, N,$ et P.

(a) Déterminez q en fonction de $\alpha, a,$ et b.

(b)(i) Montrez l'équivalence suivante :

$$MNPQ \text{ est un parallélogramme si et seulement si } n + q = m + p$$

(ii) Déduisez-en l'équivalence

$$(MNPQ \text{ est un parallélogramme}) \iff (\alpha = \frac{1}{2} \text{ ou } ABCD \text{ est un parallélogramme})$$

(c) On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \frac{1+i}{2}$. Déduisez-en que $MNPQ$ est un carré.

Exercice 3 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, on considère un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$. On note E le point d'affixe $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$ et F l'image de C par la similitude directe f de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(a) Vérifiez que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{6}$ et montrez que le triangle BCF est rectangle en F. Faites une figure soignée.

(b) On note t la translation de vecteur $\vec{u}$, et g la similitude directe de centre E qui transforme A en B. Donnez les éléments caractéristiques de g.

(c) Montrez que $g = f \circ t$. Indication : utiliser des écritures complexes de t, f, g.

(d) Montrez que g transforme D en F. Déduisez-en la nature et les angles du triangle DEF.

Exercices sur les équations différentielles

Exercice 4 Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0 \;; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 4$

(b) $y'' - 8y' + 12y = 0 \;; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0 \;; \quad y(0) = 2,\; y'(0) = 4$

(d) $y'' + 2y' + y = 0 \;; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 0$

(e) $y'' - 9y' = 0 \;; \quad y(0) = 6,\; y'(0) = 4$

(f) $y'' + 9y = 0 \;; \quad y(0) = y_0,\; y'(0) = k$

(g) $y'' + 4y = 0 \;; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 0$

(h) $y'' = y \;; \quad y(0) = 0,\; y(1) = 0$

(i) $y'' = -y \;; \quad y(0) = 0,\; y(1) = 0$

Exercice 5 Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 3 \;; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 4$

(b) $y''(x) - 8y'(x) + 12y(x) = 2x \;; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1$

(c) $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 1 \;; \quad y(0) = 2,\; y'(0) = 4$

(d) $y'' + 2y' + y = x^2 - x \;; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 0$

(e) $y'' - 9y' = -x \;; \quad y(0) = 6,\; y'(0) = 4$