Université de Rennes 1 — Année 2006-2007
UFR Mathmatiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 Donnez une forme trigonométrique, puis une forme exponentielle de

$(a)\quad z = 1 - i\sqrt{3}$	$(b)\quad z = -\sqrt{3} + i$	$(c)\quad z = -4 + 4i$
$(d)\quad z = -2$	$(e)\quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(f)\quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$(g)\quad z = 5i$	$(h)\quad z = \frac{2}{1-i}$	

Exercice 2 En utilisant le fait qu'un argument d'un quotient est une différence d'arguments, puis qu'un argument d'un produit est une somme d'arguments, donnez un argument du nombre

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i}\right)^{12}$$

Exercice 3 Dans le plan complexe, on note A et B les points d'affixes respectives 1 et $3 + 2i$. Représentez l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$.

Exercice 4 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$(a)\quad 2iz + 5 = 3 + 2i$	$(b)\quad 1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i)$
$(c)\quad (z + i)(z - 5) = z^2 - i$	$(d)\quad (z - 3i)(2z - 1) = 1 - 4z^2$
$(e)\quad z^2 = -1$	$(f)\quad z^2 + 9 = 0$
$(g)\quad z^4 + 2z^2 = 0$	

Exercice 5 Donnez la forme algébrique des complexes suivants

$$(a)\quad z_1 = (2 + i)^4 \qquad (b)\quad z_2 = (1 + i)^5 \qquad (c)\quad z_3 = \frac{4 - 3i}{2 - i} - \frac{1 - i}{-2 - i}$$

Exercice 6 Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4 + i)z^2 + (13 - 4i)z + 13i$$

Écrivez la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2 - 3i)$.

Exercice 7 Simplifiez l'écriture du complexe

$$\frac{1-\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)}$$

après avoir précisé pour quelles valeurs de x ce nombre existe.

Exercice 8 Résolvez dans $\mathbb{C}$

$$(a) \quad 2z^2-6z+5=0 \qquad (b) \quad z^2-5z+9=0 \qquad (c) \quad z^4+z^2-20=0$$

Exercice 9 (a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-1=0$.

(b) Développez le produit $(z-1)(z^3+z^2+z+1)$.

(c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3+z^2+z+1=0$?

Exercice 10 Résolvez dans $\mathbb{C}$

$$(a) \quad z=2\overline{z}-2+6i \qquad (b) \quad 2z+i\overline{z}=5-4i$$

Exercice 11 On pose $P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$.

(a) Montrez que si le complexe α est solution de l'équation $P(z)=0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Calculez $P(1+i)$. Déduisez alors la résolution de l'équation $P(z)=0$.

(c) Écrivez $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Exercice 12 Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

$$(a)\ |z|=2 \qquad (b)\ \mathrm{Re}(z)=-1 \qquad (c)\ |z|=2 \text{ et } \arg(z)=\frac{\pi}{4} \qquad (d)\ |z|=2 \text{ et } \mathrm{Im}(z)=1$$

Exercice 13 Donnez une forme trigonométrique de chaque complexe proposé.

$$(a) \quad z_1=\sqrt{3}+3i \qquad (b) \quad z_2=(\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 14 Calculez les deux complexes :

$$(a) \quad z_1=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5 \qquad (b) \quad z_2=(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$$

Indication : Une bonne remarque avant de commencer le calcul permettra de le simplifier.

Exercice 15 Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

(a) Écrivez sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $z = \frac{z_1}{z_2}$.

(b) Déduisez-en : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(c) Résolvez dans $[-\pi, \pi]$ l'équation

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2$$

Exercice 16 (a) Linéarisez $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$.

(b) Déduisez la linéarisation de $\cos^3(2x)$ et de $\sin^3(\frac{x}{3})$.

Exercice 17 Linéarisez

(a) $A(x) = \sin^5(x)$ (b) $B(x) = \sin^2(x)\cos^3(x)$ (c) $C(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

Exercice 18 Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont le même module ?

Exercice 19 Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe $Z = 2z^2 - 3z + 1$ soit réel ?

Exercice 20 Construisez dans le plan complexe

(a) l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z^2) = 1$.

(b) l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.

(c) l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $3 \cdot \mathrm{Re}(z^2) = 4 \cdot \mathrm{Im}(z^2) = 1$. On utilisera l'identité $(a - 3b)(b + 3a) = 3a^2 - 8ab - 3b^2$.

(d) Déterminez les points communs à E_1 et E_2, puis à E_1 et E_3.

Exercice 21 À tout complexe z distinct de i, on associe le complexe $Z = \frac{z+i}{z-i}$.

(a) Montrez que Z est toujours distinct de 1.

(b) Si $z = x + iy$, (x et y réels) et $Z = X + iY$ (X et Y réels), exprimez X et Y en fonction de x et y.

(c) Déduisez l'ensemble des points m d'affixe z tels que

(i) Z soit réel (ii) Z soit imaginaire pure (iii) $\mathrm{Re}(z) = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice 22}}$ Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

(a) $\|z-3\| = \|z-(1+i)\|$	(b) $\|z+1+i\| = \|z-2+3i\|$
(c) $\|z-2+i\| = \sqrt{5}$	(d) $\|z+3-i\| \leqslant 2$
(e) $\|z+3-i\| > \|z\|$	(f) $\|z\| < \|z+3-i\| < 2$

$\boxed{\textbf{Exercice 23}}$ Pour z un complexe non nul on pose $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

(a) Quel est l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = z$?

(b) Soit $z_0 = 1+i$. Calculez $\frac{1}{z_0}$ et placez les points d'affixe z_0 et $\frac{1}{z_0}$ dans le plan complexe. Construisez géométriquement le point d'affixe $f(z_0)$.

(c) Montrez que si z est un complexe de module 1, alors $f(z)$ est réel et contenu dans l'intervalle $[-1, 1]$. Cette démonstration peut être faite soit par un calcul, soit géométriquement, en s'inspirant de (b).

$\boxed{\textbf{Exercice 24}}$ Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4cm). On désigne par A le point d'affixe 1 et par $\mathcal{P}^*$ le plan $\mathcal{P}$ privé de 1. Soit f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe Z telle que $Z = \frac{z-2}{z-1}$.

(a) Soit B le point d'affixe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminez $B' = f(B)$.

(b) Déterminez les points I et J invariants par f. (On notera I celui d'ordonnée positive.)

(c) (i) Exprimez en fonction de z les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$.

(ii) Déduisez de (i) une relation entre AM' et AM et prouvez que l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 est le cercle $\mathcal{C}$. Vérifiez que B appartient à $\mathcal{C}$.

(iii) Tracez $\mathcal{C}$ et placez les points B, B', I et J sur la figure.

$\boxed{\textbf{Exercice 25}}$ On note A et B les points d'affixes respectives 1 et $-2i$.

(a) Déterminez et construisez l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 4$. Ensuite, déterminez et construisez l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $(z+2i)(\overline{z}-2i) = 4$.

(b) Soit f la transformation qui au point M d'affixe z avec $z \neq -2i$ associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = \frac{\overline{z} + 4i}{\overline{z} - 2i}$$

(i) Vérifiez que $z' - 1 = \frac{6i}{\overline{z}-2i}$

(ii) Déduisez-en que $BM \times AM' = 6$ et trouvez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'})$.

(iii) Soient M_1 et M_2 les points communs à Δ et Γ. Déterminez et construisez les points $f(M_1)$ et $f(M_2)$.