Université de Rennes 1 — Année 2006-2007
UFR Mathmatiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes et interpréter chaque valeur géométriquement, comme l'aire sous la courbe.

$$(a)\ \int_{-3}^{2}(3x-2)\ dx \qquad (b)\ \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx \qquad (c)\ \int_{-1}^{3}|x-2|\ dx$$

$$(d)\ \int_{-4}^{3}|(|x-2|-|x+2|)|\ dx \qquad (e)\ \int_{-2}^{2}\sinh(x)\ dx \qquad (f)\ \int_{0}^{\pi}\sin(2x)\ dx$$

Exercice 2 Calculer les primitives suivantes.

$$(a)\ \int(3x^2+4x-2)\ dx \qquad (b)\ \int\sqrt{3x-1}\ dx \qquad (c)\ \int\left(x^3-2\right)^2\ dx$$

$$(d)\ \int\left(\sqrt{x}+x^2\right)^3\ dx \qquad (e)\ \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ dx \qquad (f)\ \int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$$

$$(g)\ \int\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\ dx \qquad (h)\ \int e^{2x+3}\ dx \qquad (i)\ \int 2^{-x}\ dx$$

$$(j)\ \int\cosh(3x)\ dx \qquad (k)\ \int\sin(x)\cos(x)\ dx \qquad (l)\ \int\sec^2(x)\ dx$$

$$(m)\ \int\cos^2(x)\ dx \qquad (n)\ \int\sin(2x)\sin(5x)\ dx$$

Exercice 3

1. Soit f une fonction continue sur un intervale I, $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f. Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}f(x)dx$$
est $f(b(t))b'(t)-f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t)=F(b(t))-F(a(t))$.
2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t)=\int_{t^2}^{t^3}e^x\ dx.$$
   (a) Intégrer d'abord, puis dériver.
   (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.

Exercice 4 Déterminer la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} e^{(x^2)}\ dx$$

Exercice 5 Pour chacune des intégrales infinies suivantes, déterminer si elle est convergente.

$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx \qquad\qquad (b) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$
$$(c) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}}\ dx \qquad\qquad (d) \quad \int_0^{+\infty} e^{2-3x}\ dx$$

Exercice 6 Utiliser un teste de comparaison pour démontrer que les intégrales infinies suivantes sont convergentes.

$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{1+x^2}\ dx$$
$$(c) \quad \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x^3+x+4}\ dx \qquad\qquad (d) \quad \int_0^{+\infty} e^{-(x^3+x-3)}\ dx$$

Exercice 7 Utiliser le teste de comparaison des intégrales infinies pour démontrer le résulat suivant : *Supposons que f et g sont continues, et que pour tout $x \geqslant a$ on a $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$. Alors, si l'intégrale infinie $\int_a^\infty g(x)\ dx$ ne converge pas, alors l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\ dx$ ne converge pas, non plus.*

Exercice 8 Pour chacune des intégrales impropres suivantes, décider si elle est convergente. Pour celles qui le sont, déterminer leur valeur.

$$(a) \quad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\ dx \qquad\qquad (b) \quad \int_{-1}^3 \frac{1}{x+1}\ dx$$
$$(c) \quad \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad\qquad (d) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2(x)\ dx$$

Exercice 9 Déterminer les valeurs de p pour lesquelles l'intégrale impropre $\int_0^1 x^{-p}\ dx$ est convergente.

Exercice 10 Formuler un théorème concernant des intégrales *impropres* analogue au théorème concernant le teste de comparaison pour les intégrales *infinies*. Donner une démonstration de ce théorème semblabe à la démonstration concernant les intégrales infinies.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Utiliser un teste de comparaison pour démontrer que les intégrales impropres suivantes sont convergentes

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_{-2}^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+2}}\, dx$$