Université de Rennes 1 Année 2006-2007
UFR Mathmatiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée des fonction suivantes

$(a)\quad x^3 \qquad (b)\quad x^{-1} \qquad (c)\quad \cos(x) \qquad (d)\quad \tan(x) \qquad (e)\quad \mathrm{e}^x$

Exercice 2 Utiliser les règles concernant la somme, le produit, et le quotient de fonctions pour trouver la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$(a)\quad 8x^{3/4}$	$(b)\quad \sinh(x)$	$(c)\quad \mathrm{e}^v \sin(v)$
$(d)\quad x^2 \tan(x)$	$(e)\quad t\sin(t) + \cos(t)$	$(f)\quad \mathrm{th}(x)$
$(g)\quad \dfrac{3x-2}{2x-3}$	$(h)\quad \dfrac{t^2+2t}{t^2-1}$	$(i)\quad \dfrac{1-4x}{x^{2/3}}$
$(j)\quad \dfrac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}$	$(k)\quad \dfrac{\mathrm{e}^w}{1-\tan(w)}$	$(l)\quad \dfrac{\mathrm{e}^x \ln(x)}{x^2+2x^3}$

Exercice 3 Utiliser la règle concernant les compositions de fonctions pour trouver la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$(a)\quad \cos(\sqrt{x})$	$(b)\quad \cosh(\cos(t))$	$(c)\quad 2^{-x}$
$(d)\quad \ln(\ln(\ln(x)))$	$(e)\quad \left(1+s^{2/3}\right)^{3/2}$	$(f)\quad (3-2t^2)^{-3/4}$
$(g)\quad \tan(\frac{1}{x})$	$(h)\quad \sqrt{\sin(v^2)}$	$(i)\quad \sin(2\cos(3x))$
$(j)\quad 3^{3^x}$	$(k)\quad \cos(\ln(x))$	$(l)\quad \sqrt[3]{\ln(t)}$

Exercice 4 En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée (par rapport à x) de chacune des fonctions définies par :

$(a)\quad \ln(x\sin(x))$	$(b)\quad \sin\left(\dfrac{x}{\cos(x)}\right)$	$(c)\quad \sqrt{x+\mathrm{e}^x}$
$(d)\quad \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}$	$(e)\quad \cosh(x\ln(x))$	$(f)\quad \dfrac{\sin(x^2)}{\sec(x^2)}$
$(g)\quad \tan(3x^2)\cot(3x^3)$	$(h)\quad \tan\left(a^2(1+x^2)\right)$	$(i)\quad 2^{x\sin(x)}$
$(j)\quad a\sin(bx)+b\sin(ax)$	$(k)\quad (x^2\ln(x))^{(b^2)}$	$(l)\quad \tan^2\left(\dfrac{1}{cx^2+d}\right)$

Exercice 5 Calculer plusieurs dérivées successives de $f(x) = \sin(2x-5)$. En se basant sur les formules ainsi obtenues, déviner des formules générales pour $f^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n+1)}(x)$. Démontrer ces formules par récurrence.

Difficile : Trouver une formule générale qui englobe les deux formules trouvées précédemment.

Exercice 6 En utilisant MAPLE, calculer plusieurs dérivées successives de $f(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin(ax)$. Déviner les formules générales pour $f^{(4n)}(x)$, $f^{(4n+1)}(x)$, $f^{(4n+2)}(x)$, $f^{(4n+3)}(x)$. Les démontrer par récurrence.

Exercice 7 Affirmation : la dérivée d'une fonction impaire est paire, et la dérivée d'une fonction paire est impaire.

(a) Expliquer ce résultat à l'aide de graphes.

(b) Démontrer les affirmations en comparant les dérivées de $f(x)$ et $f(-x)$.

(c) Démontrer les affirmations en utilisant directement la définition de la dérivée en tant que limite.

(d) Pensez-vous que les affirmations réciproques sont vraies ? Explicitement, toute fonction paire (impaire), est-elle la dérivée d'une fonction impaire (paire) ? Si oui, donner une démonstration. Sinon, donner un contre-exemple. Si vous pensez que les affirmations réciproques sont vraies pour des fonctions satisfaisant certaines hypothèses supplémentaires, décrire une telle classe de fonctions et démontrer le résultat pour cette classe.

Exercice 8 La tangente au graphe de $y = x^3$ en un point P intersecte la courbe encore une fois dans un autre point Q. Déterminer les coordonnées de Q, en fonction des coordonnées de P.

Exercice 9 On considère, dans le plan, deux cercles tangents de rayon a (c.à.d., on a deux cercles du même rayon qui se touchent en un point). Il y a deux droites différentes qui traversent le centre du premier cercle et qui sont tangentes au deuxième cercle. Calculer la distance entre les deux points où les deux droites touchent le deuxième cercle.

Exercice 10 Localiser et classifier les points stationnaires des fonctions définies par

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & x^2-6x-4 & (b) & (x^2-1)^2 & (c) & x^4+4x^3-2x^2-12x-5 \\
(d) & \dfrac{x+1}{x^2+2} & (e) & \dfrac{2x^2-3}{x^2+1} & (f) & x^2\exp(-x^2) \\
(g) & \ln(1+x+x^2) & (h) & x^{4/3}-2x^{2/3} & (i) & |x^2-4| \\
(j) & \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} & & & &
\end{array}
$$

Exercice 11 Pour chacune des fonction suivantes, avec domaine de définition comme indiqué, trouver les maxima et minima locaux et globaux.

(a)	$x^2 + 2x - 3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$	(b)	$x(x+1)^2, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$
(c)	$\dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$	(d)	$x\sqrt{3-x^2}, \quad -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$
(e)	$x - 2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$	(f)	$\cos(2x) + 2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
(g)	$\dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$	(h)	$x \cdot 3^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
(i)	$\dfrac{\ln(x)}{x^2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$	(j)	$\dfrac{1}{\cosh(x-1)}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

Exercice 12 Localiser tous les points stationnaires de la fonction $f(x) = \cos(\mathrm{e}^x)$. Il y en a combien dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 10$?

Exercice 13 On considère l'hyperbole d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Trouver les points sur cette hyperbole qui sont les plus proches du point $(0, a)$ sur l'axe y.

Exercice 14 On veut fabriquer une boîte en carton (4 côtés et un fond, mais pas de couvercle) à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 1m×2m. Pour ceci, on découpe quatre carrés de dimension $\ell \times \ell$ des quatre coins de la feuille. Ensuite, on plie la feuille et recolle les côtés de la façon évidente pour obtenir une boîte. Trouver la valeur de ℓ pour laquelle la boîte est de volume maximal.

Exercice 15 L'aire d'un cône circulaire droit doit être de 4m^2. Trouver les dimension du cône pour lesquelles le volume est maximal.

Exercice 16 On veut construire des silos en acier pour des graines, qui doivent avoir un volume de 2000m^3. Les silos reposent sur une base en béton, et ils sont formés d'un cylindre en acier et un couvercle hémisphérique, également en acier. La production d'une hémisphère en acier coute trois fois plus cher, par unité d'aire, qu'un cylindre. Trouver le rayon du cylindre pour lequel le coût de production est minimal.

Exercice 17 Un TGV fait un long trajet. Pendant un certain segment de 1000km il roule à une certaine vitesse constante $v$km/h. Le coût du carburant par heure à cette vitesse est de

$$C(v) = 2048 + v^{3/2}.$$

Déterminer la vitesse à laquelle le train doit rouler pendant ce segment du trajet pour minimiser le coût du carburant.

Exercice 18 Utiliser la méthode de Newton-Raphson pour trouver des approximations des solutions de l'équation

$$x^5 - 4x^3 = 2$$

Dessiner le graphe pour bien pouvoir choisir des approximations initiales raisonnables pour chacune des racines. Utiliser un tabulateur pour obtenir une approximation dont les 10 premières décimales sont correctes.

Exercice 19 Une fusée est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 1000m/s. Elle décélère à cause de la gravité (g=9,8m/s^2). Une station de contrôle se trouve à 10km de la rampe de lancement. Quel est le taux d'augmentation de la distance entre fusée et station de base au moment où la fusée arrive à une hauteur de 10km ? Donner la réponse en m/s, avec une précision d'au moins une décimale.

Remarque : Le type qui a inventée les exercices ne sait évidemment pas comment fonctionne une fusée, ni un TGV, d'ailleurs... Attention, il va bricoler des centrales nucléaires !

Exercice 20 Le Radium 226 a une démi-vie de 1622 ans. Il se transforme en Plomb 210 (via plusieurs éléments intermédiares de démi-vie assez courte). Les rayonnements dégagés pendant cette transformation sont toxiques. Si j'ai un gramme de Radium dans mon laboratoire, combien de temps dois j'attendre pour n'en avoir plus qu'un milli-gramme ?

Exercice 21 Un étudiant de chimie sort un échantillon de metal fondu d'un four. Il oublie de mésurer sa température. Vingt minutes plus tard, il s'en souvient, et il trouve que la température de l'échanitillon est maintenant de 250°C. Dix minutes plus tard encore, la température est descendu à 150°C. La température ambiente dans le laboratoire est de 20°C. Si l'on suppose que la loi de Newton sur les refroidissements s'applique ici, quelle était la température de l'échantillon au moment où il sortait du four ?

Exercice 22 Dans cet exercice on va regarder plusieurs fonctions qui ne sont pas injectives. Pour chacune, on considèrera des diverses façons convenables de restreindre le domaine de définition, et on déterminera les dérivées de leurs fonctions inverses.

$$(a) \quad f(x) = \cosh(x) \qquad (b) \quad f(x) = \tan(x) \qquad (c) \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

Exercice 23 Trouver une expression pour la dérivée de $\mathrm{th}^{-1}(x)$.

Exercice 24 Utiliser la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes.

$$(a) \quad x\ln(x) \qquad (b) \quad (x^2-2x+3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c) \quad x^3\,\mathrm{e}^{-x}$$