Université de Rennes 1 — Année 2006-2007

UFR Mathématiques

MIPE L2, Module A01

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Tracez le graphique de la fonction donnée par la formule suivante, en utilisant une calculatrice ou Maple :

$$\frac{2x^2-5x+7}{x^2-5x+6}$$

Décrivez les comportements limites que vous observez près des asymptotes verticales, et pour $x \to \pm\infty$. Vous devrez éventuellement employer plusieurs graphiques afin d'observer ces limites. Dans Maple les commandes suivantes devraient vous permettre de faire ceci :

```
plot((2*x^2+5*x+7)/(x^2-5*x+6),x=0..5,y=-500..500);
plot((2*x^2+5*x+7)/(x^2-5*x+6),x=-1000..1000,y=1..3);
```

Exercice 2 Tracez les graphiques des fonctions données par les formules suivantes, en utilisant une calculatrice ou Maple. Décrivez les comportements limites que vous observez près des asymptotes verticales, et pour $x \to \pm\infty$. Comme dans l'exercice précédent, vous devrez éventuellement employer plusieurs graphiques afin d'observer ces limites. Dans Maple les commandes suivantes devraient vous permettre de faire ceci : Dans les cas impliquant des racines vous pouvez employer la traçage implicite de Maple. Par exemple

```
with(plots);implicitplot(y^3=x^3-3*x^2-6*x+8,x=-8..8,y=-8..8);
```

(a) x^4+2x^2-3x+1, (b) $3+2x^2-x^5$,

(c) $\sqrt[3]{x^3-3x^2-6x+8}$, (d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-3x^2-6x+8}}$,

(e) $\sqrt{x^2+4}$, (f) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,

(g) $\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+4x+5}$, (h) $\dfrac{3x^2+4x+5}{x^2-x-2}$,

(i) $\dfrac{x^2-2x+3}{2x-5}$, (j) $\dfrac{2x-5}{x^2-2x+3}$,

(k) $\dfrac{2x-5}{x^2-2x-8}$, (l) $\dfrac{1}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$,

(m) $\dfrac{\exp(2x)}{x^2}$, (n) $\dfrac{1}{\exp(3x)-\exp(2x)}$,

(o) $\ln\left((x^2-4)^2\right)$, (p) $\dfrac{\ln\left((x^2-4)^2\right)}{x}$,

(q) $\ln\left(2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, (r) $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,

(s) $\tan^{-1}(x)$, (t) $\mathrm{th}^{-1}(x)$,

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Décrivez le comportement limite des fonctions, donné par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \exp\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x = 0 & (b) & \sqrt{\mathrm{Ent}(\sqrt{x})}, \quad x = 9 \\
(c) & \exp\left(\dfrac{|x|}{x}\right), \quad x = 0 & (d) & \dfrac{|\sin(x)|}{\sin(x)}, \quad x = \pi \\
(e) & \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad x = 1 & (f) & \dfrac{\tan(x)}{|x|}, \quad x = 0
\end{array}
$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Trouvez les limites suivantes, en utilisant les règles algébriques appropriées.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{\cos(2x)}, & (b) & \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2x - 3}{1 + \sin(x)}, \\
(c) & \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2 - 2x + 3}, & (d) & \lim\limits_{x\to -2} (x-1)(x-2)(x+3), \\
(e) & \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2}{x - 2}, & (f) & \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 3}, \\
(g) & \lim\limits_{x\to 1} |2 - x - 3x^2| \cos(\pi x), & (h) & \lim\limits_{x\to 0} \exp((x+2)\sin(x), \\
(i) & \lim\limits_{x\to 1} \cosh(1 - x)\sin(\pi x), & (j) & \lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{(\exp(x) + 3x - \ln(x))\sin(x)}.
\end{array}
$$

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \lim\limits_{x\to 0} |x| \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & (b) & \lim\limits_{x\to\infty} \exp(-x)\cos(x), \\
(c) & \lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x)\sin(x^2 + 1), & (d) & \lim\limits_{x\to\infty} (1 - \mathrm{th}(x))\cos(x), \\
(e) & \lim\limits_{x\to 1} |x - 1| \cos\left(\dfrac{1}{x - 1}\right), & (f) & \lim\limits_{x\to\infty} \exp(\sin(x) - x),
\end{array}
$$

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ La fonction $f(x)$ est bonée, c.-à-d., il y a les constantes A et B telles que $A \leq f(x) \leq B$ pour tout x dans le domaine de f. Montrer par encadrement (théorème des gendarmes) que $\lim_{x\to\infty} f(x)\sin(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Décrivez les comportements limites près des asymptotes verticales de

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-1)(x+2)^2}$$

Exercice 8 Évaluez les limites suivantes, en utilisant des manipulations algébriques.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$,

(i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x}$, (j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1}$,

(k) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3}$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2}$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{|2x-5|}{3x+1}$,

(o) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x+\cos^2(x)}{2x^2-\sin^2(2x)}$, (p) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{\exp(x)-\sin(x)+1}{2\exp(x)+\cos(x)-3}$,

Exercice 9 Employez la méthode de changement de variable pour évaluer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)}{\exp(x)-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\ln^2(x)-1}{\ln(x)-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}(x)}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sin^{-1}(\exp(x))}{\exp(x)}$,

Exercice 10 Employez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec}(x)-\cot(x))$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a\,x)-1}{\cos(b\,x)-1}$, $(b\neq 0)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(a\,x)}{x^2}\right)$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x)}{x-\tan(x)}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$,

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{\sin(x)}$, (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt[3]{x}\right)^x$,

(k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$,

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Trouvez des exemples de paires de fonctions $f(x)$, $g(x)$ satisfaisant les conditions suivantes lorsque $x \to \infty$:

1. $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ et $f(x) - g(x) \to 0$;
2. $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ et $f(x) - g(x) \to \infty$;
3. $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ et $f(x) - g(x) \to -\infty$;
4. $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ et $f(x) - g(x) \to 3$.

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ La fonction f (x) est définie par

$$\frac{|x+k|}{x^2-k^2} \quad (k \neq 0)$$

. Quel est le domaine de $f(x)$? Esquissez le graphe de $f(x)$ montrant les discontinuités. (vous pouvez employer Maple pour avoir une idée du graphique.) Employez le graphique pour trouver les valeurs des limites à gauche et à droite en chacune des discontinuités, et montrez comment prouver ces limites à l'aide de la formule pour $f(x)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Étudiez le comportement de la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^3}{x^3-y^2}$$

le long de diverses courbes passant par le point $(0,0)$.