Université de Rennes 1 — Année 2006-2007
UFR Mathématiques
MIPE L2, Module A01

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Trouver le domaine de définition des fonctions réelles données par les formules suivantes :

(a)	$\tan(2x)$,	(b)	$x^5 - 3x^2 + 2x - 7$,	(c)	$\ln(1-x)$,	(d)	$\ln(1-x^2)$,
(e)	$\dfrac{1}{x^2-5x+6}$,	(f)	$\lvert\ln(x)\rvert$,	(g)	$\sqrt{x^2-3x-4}$,	(h)	$\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
(i)	$\dfrac{1}{\ln(x^2-4)}$,	(j)	$\dfrac{1}{\sin(2x)}$,	(k)	$\dfrac{1}{x\cos(x)}$,	(l)	$\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Exercice 2 Trouver le domaine définition des fonctions réelles données par les formules suivantes : :

$$(a)\quad y = \sqrt{x}, \qquad (b)\quad y = \sqrt{-x}, \qquad (c)\quad y = -\sqrt{x}, \qquad (d)\quad y = -\sqrt{-x},$$

Tracer les fonctions.

Exercice 3 Déterminer le domaine de définition et l'image, puis tracer la fonction

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x-5} \end{array}$$

Exercice 4 Tracer le graphe des fonctions de l'exercice 1 en utilisant une calculatrice ou Maple. Tenter de déduire du tracé quel est l'image de la fonction dans chaque cas.

Exercice 5 Lesquelles des fonctions à variables réelles suivantes sont paires ou impaires ?

(a)	$5x^4 - 3x^2$,	(b)	$2x^4 - x^3 + 1$,	(c)	$\sin(x^3)$,
(d)	$\sin^2(x^3)$,	(e)	$\mathrm{e}^{\lvert x\rvert}$,	(f)	$\ln(\lvert x\rvert)$,
(g)	$\tan(\sin(x))$,	(h)	$\mathrm{e}^{\sin(x)}$,	(i)	$\sin(\ln(x))$.

Exercice 6 Démontrer que

1. La composition $f \circ g$ de deux fonctions impaires est paire.
2. La composition $f \circ g$ de deux fonctions paires est paire.
3. La composition $f \circ g$ d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impaire.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Soit $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = \frac{2-x}{2+x}$. Donner une expression simplifiée des fonctions $f \circ f, f \circ g, g \circ f$ et $g \circ g$. Pour chaque fonction on indiquera le domaine de définition.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Afin de trouver le graphe de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ on pourra décomposer cette fonction en la composition de deux fonctions connues. Justifier votre résultat.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ On donne $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $(f \circ g)(x) = 3x - 4$. Déterminer $g(x)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Déterminer $f(x)$ tel que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 2x + 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Déterminer le quotient et le reste des divisions polynomiales suivantes

$$(a)\quad \frac{x^4+2x^2+1}{x^4-2x^2-1}, \qquad (b)\quad \frac{x^3+1}{x+2}, \qquad (c)\quad \frac{x^4-x^3+2x^2-7}{2x+5},$$
$$(d)\quad \frac{x^5-x^3+x-1}{x^2+x-3}, \qquad (e)\quad \frac{x^6-1}{x^2-x-2}, \qquad (f)\quad \frac{x^5-x^4+2x^3+x}{x^3+2x^2-3}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Factoriser les polynômes suivants (en produit de polynômes irréductibles)

$$\begin{array}{llll} (a) & x^3+x^2-4x-4, & (b) & y^3+y^2-y-1, \\ (c) & z^3+2z^2-23z-60, & (d) & c^5+c^4-2c^3-2c^2+c+1, \\ (e) & t^6-1, & (f) & u^4+u^3-25u^2-37u+60 \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Démontrer que $x = -2$ est une racine de $g(x) = x^5 + 9x^4 + 32x^3 + 56x^2 + 48x + 16$. Déterminer la multiplicité de cette racine sans factoriser le polynôme g.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} (a) & |2x-5| = 4, & (b) & |x^2-2x-5| = 1, \\ (c) & |x^3-1| = 7, & (d) & |2x+4| < 3, \\ (e) & |2x^2-5x-4| \leq 3, & (f) & |x^2+5x| \geq 2. \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Donner le graphe des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a)\quad |x^2-5x+6|, \qquad (b)\quad |\sin(2x)|, \qquad (c)\quad \left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

Indication : dans un premier temps, considérer les expressions sans valeurs absolues.

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Exprimer $\cos(5x)$ à l'aide de $\cos(x)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 17}}$ Trouver une formule d'addition pour exprimer $\text{cosec}(x+y)$ à l'aide de sec et de cosec.

$\boxed{\textbf{Exercice 18}}$ Utiliser les propriétés de la fonction exp pour montrer que

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln(p) - \ln(q).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 19}}$ Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$\begin{array}{llll} (a) & \left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}, & (b) & \log_9\left(\frac{1}{27}\right), \\ (c) & \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)). & & \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$ Exprimer $\text{sh}(3x)$ à l'aide de $\text{sh}(x)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ En partant du graphe de sh, ch et th, trouver le graphe de leurs fonctions inverses.

$\boxed{\textbf{Exercice 22}}$ Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$\begin{array}{llll} (a) & \text{ch}(\ln(x)), & (b) & \coth(\ln(x)), \\ (c) & \dfrac{\text{ch}(\ln(x) - \text{sh}(\ln(x))}{\text{ch}(\ln(x) + \text{sh}(\ln(x))}. & & \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 23}}$ Pour les fonctions suivantes déterminer le domaine de définition et l'image, noter si vous estimer qu'elle est injective ou non. , trouver l'expression de la fonction inverse et déterminer le domaine de définition et l'image de cette dernière. Puis tracer la fonction et son inverse dans un même repère :

$$(a) \quad x \mapsto \frac{2x}{3x-1}, \qquad (b) \quad x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 24}}$ Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes, dont le domaine est indiqué, notez-si vous pensez qu'elle est bijective, en considérant la formule. Tracez le graphe de chaque fonction pour confirmer vos conclusions (ou autrement).

$$\begin{array}{llll} (a) & \tan(x), \quad 0 < x < 1; & (b) & \exp(|x|), \quad -1 < x < 1; \\ (c) & \text{ch}(2x), x > 1; & (d) & x^2 + 6x + 9, x > 0; \\ (e) & x^2 - 6x + 9, x > 0; & (f) & \dfrac{1}{x-1}, x \neq 1; \\ (g) & \dfrac{1}{(x-1)^2}, x > 1; & (h) & \exp(x)\ln(x), x > 0. \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 25}}$ Montrez que si le f et le g sont des fonctions croissantes sur le domaine D, alors $f+g$ est une fonction croissante. Donnez des exemples pour prouver que $f-g$, fg et f/g ne sont pas nécessairement des fonctions croissantes.

$\boxed{\textbf{Exercice 26}}$ Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donnée par la formule suivante.

$$5 - 12x - 2x^2, \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de $f(x)$ et le graphe de son inverse sur un même graphique.

$\boxed{\textbf{Exercice 27}}$ Simplifier les expressions suivantes autant que possible.

$$(a) \quad \cos(\sin^{-1}(x)); \quad (b) \quad \sin(\tan^{-1}(x)); \quad (c) \quad \tan(\sec^{-1}(x)).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 28}}$ Trouvez des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\tan^{-1}(x) \neq \frac{\sin^{-1}(x)}{\cos^{-1}(x)}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 29}}$ En partant des graphes de sh, ch et th, esquisser les graphes de leurs inverses par réflexion à la droite $y = x$.

$\boxed{\textbf{Exercice 30}}$ Prouvez les formules

$$(a) \quad \mathrm{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \quad (b) \quad \mathrm{th}^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 31}}$ Dans la théorie des circuits électriques, il y a un fonction appelée la fonction de Heaviside, baptisé du nom du physicien Oliver Heaviside (1850-1925), définie comme suit :

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

elle représente l'entrée à un circuit qui est alimenté au temps$t = 0$. Il s'agit d'une fonction définie par deux morceaux pour laquelle un symbole simple est employé.

Que représente la fonction $H(-t)$? Que représente $H(t-1)$? Quel est le graphique de $H(t) - H(t-1)$?

Vous pouvez employer ceci comme un point de départ pour une autre recherche sur des fonctions définies ayant des formules simples. Ces fonctions sont en fait sont employées en liaison avec des transformées de Laplace pour résoudre des équations différentielles liées aux circuits électriques.