Nombres réels et complexes. Fonctions classiques
MIPE 1 - A01- Juin 2007
Examen - 2 heures

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

1) Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(\sin(x)) - \sqrt{1-x}.$$

2) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \ln(1+x^2) + \exp(x^2) - 1.$$

a) Montrez que $g(x) \geq 0$ si $x \in \mathbf{R}$.
b) Montrez que 0 est un minimum global de g.
c) Montrez que g est dérivable et calculez g'.
d) Montrez que 0 est le seul extremum local de g.

Exercice 2

1) En explicitant les règles utilisées, déterminez les limites suivantes :
a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\exp(x)+\exp(4x)}{2+\exp(2x)+7\exp(3x)},$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-3\exp(-x)+2}{x}.$$

2) Calculez les dérivées des fonctions suivantes :
a)

$$x \mapsto x^3 \ln(1+x^2),$$

b)

$$x \mapsto \frac{\exp(x)}{2+\cos(3x)}.$$

Exercice 3

Calculez les intégrales suivantes
1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\cosh(x)}$$

en faisant le changement de variables $u = \exp(x)$,
2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

en faisant le changement de variables $x = \sin(t)$,
3)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(3x)\, dx$$

en intégrant par parties.

Exercice 4

1) a) Exprimez $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.
   b) Calculez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\, dx.$$

2) Déterminez les racines carrées complexes de $3+4i$.
3) Déterminez le module et un argument du nombre complexe

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}.$$

Exercice 5

Dans chaque cas trouvez la solution y de l'équation différentielle :
1)

$$y' + y = x^2 \quad \text{et} \quad y(0) = 1,$$

2)

$$y'' + 9y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,$$

3)

$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x \quad \text{et} \quad y(0) = y'(0) = 1.$$