Nombres réels et complexes. Fonctions classiques
MIPE 1 - A01- Janvier 2007
Examen - 2 heures

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

1) Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sin(\ln(x+1)) - \sqrt{1-x}.$$

2) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = 2x^3 + \exp(3x) - 1.$$

a) Montrez que g est dérivable et calculez g'.
b) Montrez que g est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
c) On note g^{-1} la fonction réciproque de g. Vérifiez que $g(0) = 0$ et calculez $(g^{-1})'(0)$.

Exercice 2

1) En explicitant les règles utilisées, déterminez les limites suivantes :
a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) + 2\exp(-x) - 3\cos(x)}{2x},$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x) + x + \sqrt{x} + \sinh(x)}{\exp(x+2)}.$$

2) Calculez les dérivées des fonctions suivantes :
a)

$$x \mapsto x^3 \exp(x),$$

b)

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{2+\cos(3x)}.$$

Exercice 3

Calculez les intégrales suivantes
1)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\exp(x)+\exp(-x)}$$
en faisant le changement de variables $u = exp(x)$,
2)
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
en faisant le changement de variables $x = \sin(t)$,
3)
$$\int_0^{\pi} x(2\sin(x)\cos(x))\, dx$$
en deux étapes (cherchez une primitive de $2\sin(x)\cos(x)$ puis intégrez par parties).

Exercice 4

1) a) Exprimez $\cos^4(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.
b) Calculez
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\, dx.$$
2) Déterminez les racines carrées complexes de $8-6i$.
3) Déterminez le module et un argument du nombre complexe
$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}.$$

Exercice 5

Dans chaque cas trouvez la solution y de l'équation différentielle :
1)
$$y' + 2y = 2x^2 \quad \text{et} \quad y(0) = 1,$$
2)
$$y'' + 4y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,$$
3)
$$y'' - 2y' + 2y = 1 + x \quad \text{et} \quad y(0) = y'(0) = 1.$$