Université de Rennes 1 Année 2007-2008
UFR Mathématiques
MIPE L1, Module A01

Révisions

Fonctions

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{3x}$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\sin x - e^x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \cos x}{\ln x - \sqrt{x}}$$

Exercice 3 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$$

$$\forall x > 0 \quad x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e}$$

Exercice 4 On considère la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Le graphe C_f de f possède t-il des symétries ?
2) Etudier les variations de f. Préciser les extrema.
3) Pour les questions suivantes, on pourra factoriser $x^2 - x^4$.
   a) Déterminer si elle existe

$$\lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)}{x-1}$$

b) Déterminer, si elles existent,

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)}{x}$$

c) Qu'en déduire sur la dérivabilité de f, ainsi que sur les tangentes éventuelles à C_f aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$?

Intégration

Exercice 5

1) Exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.
2) Calculer les primitives $\int \cos^4 x \, dx$.

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{e^x + 2e^{-x}}$$

Nombres complexes

Exercice 7 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $3z^2 + 4z - 3 = 0$.

Exercice 8 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (1 + 3i)z + (-2 + 2i) = 0$.

Exercice 9

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations $z^3 = i$, puis $z^3 = -3i$.
2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 + 2iZ + 3 = 0$.
3) En déduire, la résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$.

Equations différentielles

Exercice 10 On considère, sur $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(E) : \; y' - 2y = e^{2x} \ln x$$

1) Résoudre l'équation $(E_0) : \; y' - 2y = 0$.
2) Soit f une primitive de la fonction ln sur I.
   Montrer que la fonction y_0, définie par $y_0(x) = e^{2x} f(x)$, est une solution particulière de (E) sur I.

3) En déduire la solution générale de l'équation (E) sur I.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Résoudre les équations différentielles :

1)
$$y' - y + 1 = e^x$$

2)
$$y' - y = e^{3x}$$

3)
$$y' - 3y = x^3 + 1$$

4)
$$y'' - 2y + 10 = e^x + x^2$$