Université de Rennes 1 — Année 2007-2008
UFR Mathématiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 7

Nombres complexes

Forme algébrique, forme exponentielle

Exercice 1 Donnez la forme algébrique des complexes suivants

$$(a)\quad z_1 = (2+i)^4 \qquad (b)\quad z_2 = (1+i)^5 \qquad (c)\quad z_3 = \frac{4-3i}{2-i} - \frac{1-i}{-2-i}$$

Exercice 2 Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$

Écrivez la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Exercice 3 Donnez la forme exponentielle de

$(a)\quad z = 1 - i\sqrt{3}$ $\qquad (b)\quad z = -\sqrt{3} + i$ $\qquad (c)\quad z = -4 + 4i$
$(d)\quad z = -2$ $\qquad (e)\quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad (f)\quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$(g)\quad z = 5i$ $\qquad (h)\quad z = \frac{2}{1-i}$

Exercice 4 Donnez la forme exponentielle de chaque complexe proposé.

$$(a)\quad z_1 = \sqrt{3} + 3i \qquad (b)\quad z_2 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 5 En utilisant le fait qu'un argument d'un quotient est une différence d'arguments, puis qu'un argument d'un produit est une somme d'arguments, donnez un argument du nombre

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i}\right)^{12}$$

Exercice 6 Sachant que $e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 Simplifiez l'écriture du complexe

$$\frac{1-\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)}$$

après avoir précisé pour quelles valeurs de x ce nombre existe.
Quelle est sa forme exponentielle ?

Exercice 8 Calculez les deux complexes :

$$(a) \quad z_1=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5 \qquad (b) \quad z_2=(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$$

Indication : Une bonne remarque avant de commencer le calcul permettra de le simplifier.

Linéarisation

Exercice 9 Linéariser $\cos^5 x$.
En déduire les primitives de $x \mapsto \cos^5 x$.

Exercice 10 Linéariser $\cos^2(3x)\sin^2(5x)$.
En déduire les primitives de $x \mapsto \cos^2(3x)\sin^2(5x)$.

Exercice 11 Linéariser $\cos^2 x \sin^4 x$.
En déduire les primitives de $x \mapsto \cos^2 x \sin^4 x$.

Résolution d'équations

Exercice 12 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(a) $2iz+5=3+2i$ $\qquad$ (b) $1-2iz+4z=3i(1+5i)$

(c) $(z+i)(z-5)=z^2-i$ $\qquad$ (d) $(z-3i)(2z-1)=1-4z^2$

(e) $z^2=-1$ $\qquad$ (f) $z^2+9=0$

(g) $z^4+2z^2=0$

Exercice 13 Résolvez dans $\mathbb{C}$

$$(a) \quad 2z^2-6z+5=0 \qquad (b) \quad z^2-5z+9=0 \qquad (c) \quad z^4+z^2-20=0$$

Exercice 14 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.

Exercice 15 Déterminer les racines carrées de $1+3i$ et $1+4\sqrt{5}i$.

Exercice 16

1) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$ et $-i$.

2) Déterminer les racines 4-ième de $2i$.

3) Déterminer les racines 6-ième de $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

Exercice 17 (a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.
(b) Développez le produit $(z-1)(z^3+z^2+z+1)$.
(c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3+z^2+z+1=0$?

Exercice 18 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

2) $z^6 + z^3 + 1 = 0$

3) $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$

Exercice 19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (2+3i)z^2 + (-3+5i)z + 6 + 2i = 0$$

Indication : chercher d'abord une solution réelle.

Exercice 20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z-2)^n + (z+2)^n = 0$$

Exercice 21 Résolvez dans $\mathbb{C}$

$$(a) \quad z = 2\overline{z} - 2 + 6i \qquad (b) \quad 2z + i\overline{z} = 5 - 4i$$

Exercice 22 Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que, si z_0 est racine de P, alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi racine de P.

Exercice 23 On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

(a) Montrez que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Calculez $P(1+i)$. Déduisez alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

(c) Écrivez $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Nombres complexes et géométrie

$\boxed{\textbf{Exercice 24}}$ Dans le plan complexe, on note A et B les points d'affixes respectives 1 et $3+2i$. Représentez l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-1| = |z-(3+2i)|$.

$\boxed{\textbf{Exercice 25}}$ Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ $\quad$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ $\quad$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

$\boxed{\textbf{Exercice 26}}$ Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

$\boxed{\textbf{Exercice 27}}$ Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

(a) $|z-3| = |z-(1+i)|$ $\quad$ (b) $|z+1+i| = |z-2+3i|$
(c) $|z-2+i| = \sqrt{5}$ $\quad$ (d) $|z+3-i| \leqslant 2$
(e) $|z+3-i| > |z|$ $\quad$ (f) $|z| < |z+3-i| < 2$

$\boxed{\textbf{Exercice 28}}$ Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

$\boxed{\textbf{Exercice 29}}$ Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe $Z = 2z^2 - 3z + 1$ est réel ?

$\boxed{\textbf{Exercice 30}}$ Construisez dans le plan complexe

(a) l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z^2) = 1$.

(b) l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.

(c) l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $3\cdot\mathrm{Re}(z^2) = 4\cdot\mathrm{Im}(z^2) = 1$. On utilisera l'identité $(a-3b)(b+3a) = 3a^2 - 8ab - 3b^2$.

(d) Déterminez les points communs à E_1 et E_2, puis à E_1 et E_3.