Université de Rennes 1 — Année 2007-2008
UFR Mathématiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 5

Intégrale et aire

Exercice 1 Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

$$(a)\quad \int_{-3}^{2}(3x-2)\ dx \qquad (b)\quad \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx \qquad (c)\quad \int_{-1}^{3}|x-2|\ dx$$

$$(d)\quad \int_{-4}^{3}|(|x-2|-|x+2|)|\ dx$$

Exercice 2 Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

$$(e)\quad \int_{-2}^{2}\mathrm{sh}(x)\ dx \qquad (f)\quad \int_{0}^{\pi}\sin(2x)\ dx$$

Tableau de primitives

Exercice 3 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes.

$$(a)\quad \int(3x^2+4x-2)\ dx \qquad (b)\quad \int\sqrt{3x-1}\ dx \qquad (c)\quad \int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$$

$$(d)\quad \int\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\ dx \qquad (e)\quad \int e^{2x+3}\ dx \qquad (f)\quad \int 2^{-x}\ dx$$

Linéarité de l'intégrale

Exercice 4 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes.

$$(a)\quad \int\left(x^3-2\right)^2\ dx \qquad (b)\quad \int\left(\sqrt{x}+x^2\right)^3\ dx \qquad (c)\quad \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ dx$$

$$(d)\quad \int\mathrm{ch}(3x)\ dx \qquad (e)\quad \int\sin(x)\cos(x)\ dx \qquad (f)\quad \int\cos^2(x)\ dx$$

$$(g)\quad \int\sin(2x)\sin(5x)\ dx$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 5

1. Soit f une fonction continue sur un intervale I, $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f. Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx$$
est $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.
2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x \, dx.$$
   (a) Intégrer d'abord, puis dériver.
   (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.

Exercice 6 Déterminer la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} e^{(x^2)} \, dx$$

Intégrales impropres

Si f est continue sur $[a, +\infty[$, et que $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)dx = L$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut L.

Exercice 7 Déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx$ est convergente.

Exercice 8 Calculer les intégrales impropres suivantes :
$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2} \, dx \qquad (b) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$
$$(c) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}} \, dx \qquad (d) \quad \int_0^{+\infty} e^{2-3x} \, dx$$

Exercice 9 Déterminer si les limites suivantes sont finies ou infinies :
$$(a) \quad \lim_{X\to 2_+} \int_X^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \, dx \qquad (b) \quad \lim_{X\to -1_+} \int_{-1}^3 \frac{1}{x+1} \, dx \quad (c) \quad \lim_{X\to 0_+} \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} \, dx$$

Intégrations par parties

Exercice 10 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes.

$$(a)\ \int x\cdot \mathrm{sh}(x)\ dx \qquad (b)\ \int x^2\cdot e^x\ dx \qquad (c)\ \int x^2\cdot \mathrm{ch}(3x)\ dx$$

$$(d)\ \int x\cdot (\ln(x))^2\ \ dx \qquad (e)\ \int x^2\cdot \cos(x)\ dx \qquad (f)\ \int x\cdot \arctan(x)\ dx$$

$$(g)\ \int x\cdot \cos^2(x)\ dx \qquad (h)\ \int \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\ dx \qquad (i)\ \int (x+1)\cdot e^x\cdot \ln(x)\ dx$$

$$(j)\ \int \arccos(x)\ dx$$

Exercice 11 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, déterminer les primitives

$$\int e^{ax}\cos(bx)\ dx$$

Exercice 12 Soit

$$I_n := \int_1^e x\cdot (\ln(x))^n\ dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Puis calculer $\int_1^e x\cdot (\ln(x))^4\ dx$.

Exercice 13 Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx.$$

En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x)\cdot\cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x)\ dx$.

Exercice 14 Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\ dx.$$

dans le cas où $n=3$.

Exercice 15 Pour $x>0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

On admet que l'intégrale converge.

1) Etablir que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

2) Calculer $\Gamma(4)$. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour un entier naturel n.

3) Sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, déterminer les valeurs de $\Gamma(\frac{3}{2})$ et de $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Changements de variables

Exercice 16 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes

$(a)\ \int 3x^2(x^3+4)^{20}\ dx \qquad (b)\ \int x(x^2-6)^{\frac{4}{3}}\ dx \qquad (c)\ \int (x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}\ dx$

$(d)\ \int \frac{x^2}{2x^3+5}\ dx \qquad (e)\ \int \frac{x^2}{4+x^6}\ dx \qquad (f)\ \int \cos(x)\sin^7(x)\ dx$

$(g)\ \int \tan^5(x)\sec^2(x)\ dx \qquad (h)\ \int x^2\cos(2x^3)\ dx \qquad (i)\ \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$

$(j)\ \int x\cdot\exp(x^2-2)\ dx \qquad (k)\ \int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\ dx \qquad (l)\ \int 2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}\ dx$

$(m)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\ dx \qquad (n)\ \int \frac{1}{e^x+2e^{-x}}\ dx$

Exercice 17 A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

$(a)\ \int_0^1 x^2\exp(x^3)\ dx \qquad (b)\ \int_0^1 x^4\cdot(x^5-1)^6\ dx$

$(c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\ dx \qquad (d)\ \int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x\sqrt[3]{1+e^x}\ dx$

Exercice 18 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes

$(a)\ \int \sqrt{2-x^2}\ dx \qquad (b)\ \int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx$

$(c)\ \int \sqrt{x^2-4}\ dx \qquad (d)\ \int \sqrt{x^2+4x-5}\ dx$

$(e)\ \int \sqrt{2x^2+32}\ dx \qquad (f)\ \int \sqrt{2x^2-4x+4}\ dx$

Exercice 19 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes

$(a)\ \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\ dx \qquad (b)\ \int \frac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx \qquad (c)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

$(d)\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}\ dx \qquad (e)\ \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\ dx \qquad (f)\ \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\ dx$

$(g)\ \int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx \qquad (h)\ \int \sqrt{4x^2-8x+24}\ dx$

Exercice 20 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes :

$(a)\ \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)+\sin^2(x)}}\ dx \qquad (b)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}\ dx$

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & \dfrac{7}{x^2-5x-6} & (b) & \dfrac{3x-11}{x^2-5x+6} & (c) & \dfrac{3}{x^2+4x+13} \\
(d) & \dfrac{2x+3}{x^2+6x+10} & (e) & \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+5} & (f) & \dfrac{x^3+2x^2-x-1}{x^2+6x+13} \\
(g) & \dfrac{3x-1}{x^2+4x+4} & (h) & \dfrac{5x^2+4}{x^3-3x^2+3x-1} & (i) & \dfrac{2x^2-11}{x^2+6x+9} \\
(j) & \dfrac{x^2+1}{x^3+x^2+3x-5} & (k) & \dfrac{x^3-x^2+4}{x^3+x^2+3x-5} & (l) & \dfrac{25x}{x^4-x^2-2x+2} \\
(m) & \dfrac{2x^2-3x+4}{x^4-2x^2+1} & (n) & \dfrac{x^2+3x-2}{(x^2-4x+5)^2} & &
\end{array}
$$

$\boxed{\textbf{Exercice 22}}$ En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes, calculer les primitives suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$
(a) \quad \int \frac{1}{5+3\cos(x)}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)+2}\, dx
$$

$\boxed{\textbf{Exercice 23}}$ Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$
(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+3\cos(x)-\sin(x)}\, dx
$$