Université de Rennes 1 — Année 2007-2008
UFR Mathématiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 3

Dérivée d'une fonction

Avec la seule définition

Exercice 1 Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$(a)\quad \sqrt{x} \qquad (b)\quad x^3 \qquad (c)\quad x^{-1}$$

Exercice 2 En admettant la dérivabilité en 0, établir la dérivabilitée sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$(a)\quad \cos(x) \qquad (b)\quad \tan(x) \qquad (c)\quad \mathrm{e}^x$$

Opérations algébriques

Exercice 3 En précisant les règles que vous utilisez, donnez le sous-ensemble du domaine de définition où vous êtes sûr que sont dérivables les fonctions données par les formules suivantes :

$$(a)\quad |\, x^2+3x \,| \qquad (b)\quad \frac{x}{\ln x} + \mathrm{Arcsin}(x^2) \qquad (c)\quad xe^{\frac{1}{x}}$$

$$(d)\quad \sqrt{e^x - e^{2x}} \qquad (e)\quad \mathrm{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$$

Exercice 4 Utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a)\quad 8x^{3/4} \qquad (b)\quad \sinh(x) \qquad (c)\quad \mathrm{e}^x \sin(x)$$

$$(d)\quad x^2 \tan(x) \qquad (e)\quad x\sin(x)+\cos(x) \qquad (f)\quad \mathrm{th}(x)$$

$$(g)\quad \frac{3x-2}{2x-3} \qquad (h)\quad \frac{x^2+2x}{x^2-1} \qquad (i)\quad \frac{1-4x}{x^{2/3}}$$

$$(j)\quad \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)} \qquad (k)\quad \frac{\mathrm{e}^x}{1-\tan(x)} \qquad (l)\quad \frac{\mathrm{e}^x \ln(x)}{x^2+2x^3}$$

Exercice 5 Utiliser la règle concernant la dérivée d'une composée pour trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$(a)\quad \cos(\sqrt{x})$	$(b)\quad \cosh(\cos(x))$	$(c)\quad 2^{-x}$
$(d)\quad \ln(\ln(\ln(x)))$	$(e)\quad \left(1+x^{2/3}\right)^{3/2}$	$(f)\quad \left(3-2x^2\right)^{-3/4}$
$(g)\quad \tan(\frac{1}{x})$	$(h)\quad \sqrt{\sin(x^2)}$	$(i)\quad \sin(2\cos(3x))$
$(j)\quad 3^{3^x}$	$(k)\quad \cos(\ln(x))$	$(l)\quad \sqrt[3]{\ln(x)}$

Exercice 6 En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$(a)\quad \ln(x\sin(x))$	$(b)\quad \sin\left(\dfrac{x}{\cos(x)}\right)$	$(c)\quad \sqrt{x+\mathrm{e}^x}$
$(d)\quad \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}$	$(e)\quad \cosh(x\ln(x))$	$(f)\quad \tan(3x^2)\cot(3x^3)$
$(g)\quad \tan\left(a^2(1+x^2)\right)$	$(h)\quad 2^{x\sin(x)}$	$(i)\quad a\sin(bx)+b\sin(ax)$
$(j)\quad \left(x^2\ln(x)\right)^{(b^2)}$	$(k)\quad \tan^2\left(\dfrac{1}{cx^2+d}\right)$	

Dérivée et parité

Exercice 7 On rappelle que la dérivée d'une fonction impaire est paire, et la dérivée d'une fonction paire est impaire.

(a) Expliquer ce résultat à l'aide de graphes.

(b) Démontrer les affirmations en comparant les dérivées de $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$.

(c) Démontrer les affirmations en utilisant directement la définition de la dérivée en tant que limite.

(d) Pensez-vous que les affirmations réciproques sont vraies ? C'est-à-dire, toute fonction paire (resp. impaire) est-elle la dérivée d'une fonction impaire (resp. paire) ? Si oui, en donner une démonstration. Sinon, donner un contre-exemple.

Points stationnaires, extréma

Exercice 8 Localiser et classifier les points stationnaires (c'est-à-dire où la dérivée s'annule) des fonctions données par les formules suivantes :

$(a)\quad x^2-6x-4$	$(b)\quad \left(x^2-1\right)^2$	$(c)\quad x^4+4x^3-2x^2-12x-5$
$(d)\quad \dfrac{x+1}{x^2+2}$	$(e)\quad \dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$	$(f)\quad x^2\exp\left(-x^2\right)$
$(g)\quad \ln(1+x+x^2)$	$(h)\quad x^{4/3}-2x^{2/3}$	$(i)\quad \lvert x^2-4\rvert$
$(j)\quad \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}$		

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Pour chacune des fonctions numériques données par les formules et les domaines de définitions ci-dessous, trouver les maxima et minima locaux et globaux.

$(a)\quad x^2+2x-3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$	$(b)\quad x(x+1)^2, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$
$(c)\quad \dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$	$(d)\quad x\sqrt{3-x^2}, \quad -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$
$(e)\quad x-2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$	$(f)\quad \cos(2x)+2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
$(g)\quad \dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$	$(h)\quad x\cdot 3^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
$(i)\quad \dfrac{\ln(x)}{x^2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$	$(j)\quad \dfrac{1}{\cosh(x-1)}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Localiser tous les points stationnaires de la fonction numérique $x \mapsto \cos(\mathrm{e}^x)$. Combien y en a t-il dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 10$?

Géométrie, Optimisation

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ La tangente au graphe de la fonction $x \mapsto x^3$ en un point P intersecte la courbe encore une fois en un autre point Q.
Déterminer les coordonnées de Q, en fonction des coordonnées de P.

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ On considère l'hyperbole d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Trouver les points sur cette hyperbole qui sont les plus proches du point $(0, a)$ sur l'axe des ordonnées.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ On veut fabriquer une boîte en carton (quatre côtés et un fond, mais pas de couvercle) à partir d'une feuille de carton rectangulaire de un mètre sur deux mètres. Pour ceci, on découpe quatre carrés de dimension $\ell \times \ell$ aux quatre coins de la feuille. Ensuite, on plie la feuille et recolle les côtés de la façon naturelle pour obtenir une boîte. Trouver la valeur de ℓ pour laquelle la boîte est de volume maximal.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ L'aire d'un cône circulaire droit doit être de $4\mathrm{m}^2$. Trouver les dimensions du cône pour lesquelles le volume est maximal.
On rappelle que le volume et l'aire d'un cône circulaire droit de hauteur h et de base circulaire de rayon r valent respectivement $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ et $A = \pi r(r + \sqrt{r^2+h^2})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ On veut construire des silos en acier pour des graines, qui doivent avoir un volume de $2000\mathrm{m}^3$. Les silos reposent sur une base en béton, et ils sont formés d'un cylindre en acier et d'un couvercle hémisphérique, également en acier. La production d'un hémisphère en acier coûte trois fois plus cher, par unité d'aire, qu'un cylindre. Trouver le rayon du cylindre pour lequel le coût de production est minimal.

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Un TGV fait un long trajet. Pendant un certain segment de 1000km il roule à une certaine vitesse constante $v$km/h. Le coût du carburant par heure à cette vitesse est de

$$C(v) = 2048 + v^{3/2}.$$

Déterminer la vitesse à laquelle le train doit rouler pendant ce segment du trajet pour minimiser le coût du carburant.

Dérivée d'une réciproque

$\boxed{\textbf{Exercice 17}}$ Dans cet exercice il s'agit dans un premier temps de restreindre le domaine des fonctions numériques données par les formules ci-dessous, afin d'obtenir une bijection sur l'image. Puis, on déterminera les dérivées des fonctions réciproques.

$$(a) \quad f(x) = \cosh(x) \qquad (b) \quad g(x) = \tan(x) \qquad (c) \quad h(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 18}}$ Trouver une expression pour la dérivée de $\operatorname{argtanh}(x)$.

Dérivées d'ordre supérieur

$\boxed{\textbf{Exercice 19}}$ Calculer les premières dérivées d'ordre supérieur de la fonction donnée par $f(x) = \sin(2x - 5)$. En se basant sur les formules ainsi obtenues, deviner des formules générales pour $f^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n+1)}(x)$. Démontrer ces formules par récurrence.

Difficile : Trouver une formule générale qui englobe les deux formules trouvées précédemment.

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$ En utilisant MAPLE par exemple, calculer plusieurs dérivées successives de la fonction donnée par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.
Deviner les formules générales pour $f^{(4n)}(x)$, $f^{(4n+1)}(x)$, $f^{(4n+2)}(x)$, $f^{(4n+3)}(x)$. Les démontrer par récurrence.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ Utiliser la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) \quad x \ln(x) \qquad (b) \quad (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c) \quad x^3\,\mathrm{e}^{-x}$$