Université de Rennes 1 — Année 2007-2008

UFR Mathématiques

MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Tracez le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle donnée par la formule suivante, en utilisant une calculatrice ou Maple :

$$\frac{2x^2-5x+7}{x^2-5x+6}$$

Décrivez les comportements limites que vous observez près des asymptotes verticales, et pour $x \to \pm\infty$. Vous devrez éventuellement employer plusieurs graphiques afin d'observer ces limites.

Exercice 2 Tracez les graphes des fonctions données par les formules suivantes, en utilisant une calculatrice ou Maple. Décrivez les comportements limites que vous observez près des asymptotes verticales, et pour $x \to \pm\infty$. Comme dans l'exercice précédent, vous devrez éventuellement employer plusieurs graphiques afin d'observer ces limites.

(a) x^4+2x^2-3x+1, (b) $3+2x^2-x^5$,

(c) $\sqrt[3]{x^3-3x^2-6x+8}$, (d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-3x^2-6x+8}}$,

(e) $\sqrt{x^2+4}$, (f) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,

(g) $\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+4x+5}$, (h) $\dfrac{3x^2+4x+5}{x^2-x-2}$,

(i) $\dfrac{x^2-2x+3}{2x-5}$, (j) $\dfrac{2x-5}{x^2-2x+3}$,

(k) $\dfrac{2x-5}{x^2-2x-8}$, (l) $\dfrac{1}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$,

(m) $\dfrac{\exp(2x)}{x^2}$, (n) $\dfrac{1}{\exp(3x)-\exp(2x)}$,

(o) $\ln\left((x^2-4)^2\right)$, (p) $\dfrac{\ln\left((x^2-4)^2\right)}{x}$,

(q) $\ln\left(2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, (r) $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,

(s) $\arctan(x)$, (t) $\operatorname{argth}(x)$.

Exercice 3 Soit la fonction f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{|x+k|}{x^2-k^2} \quad (k \neq 0)$$

Quel est son domaine ? Esquissez le graphe de f montrant les discontinuités. Utilisez le graphe pour trouver les valeurs des limites à gauche et à droite en chacune des discontinuités, et justifiez ensuite ces limites.

Exercice 4 Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \exp\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x=0 & (b) & \sqrt{\mathrm{Ent}(\sqrt{x})}, \quad x=9 \\
(c) & \exp\left(\dfrac{|x|}{x}\right), \quad x=0 & (d) & \dfrac{|\sin(x)|}{\sin(x)}, \quad x=\pi \\
(e) & \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad x=1 & (f) & \dfrac{\tan(x)}{|x|}, \quad x=0
\end{array}$$

Exercice 5 Trouvez les limites suivantes, en utilisant les règles algébriques appropriées.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x+4}{\cos(2x)}, & (b) & \displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{2x-3}{1+\sin(x)}, \\
(c) & \displaystyle\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-2x+3}, & (d) & \displaystyle\lim_{x\to -2} (x-1)(x-2)(x+3), \\
(e) & \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2}{x-2}, & (f) & \displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{x^2+2x-4}{x-3}, \\
(g) & \displaystyle\lim_{x\to 1} |2-x-3x^2|\cos(\pi x), & (h) & \displaystyle\lim_{x\to 0} \exp(x+2)\sin(x), \\
(i) & \displaystyle\lim_{x\to 1} \cosh(1-x)\sin(\pi x), & (j) & \displaystyle\lim_{x\to\pi_-} \sqrt{(\exp(x)+3x-\ln(x))\sin(x)}.
\end{array}$$

Exercice 6 Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \displaystyle\lim_{x\to 0} |x|\sin\left(\frac{1}{x}\right), & (b) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(-x)\cos(x), \\
(c) & \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \exp(x)\sin(x^2+1), & (d) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1-\mathrm{th}(x))\cos(x), \\
(e) & \displaystyle\lim_{x\to 1} |x-1|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right), & (f) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(\sin(x)-x).
\end{array}$$

Exercice 7 Soit f une fonction bornée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes A et B telles que $A \leq f(x) \leq B$ pour tout x dans le domaine de f.
Montrer par encadrement (théorème des gendarmes) que $\lim_{x\to 0} f(x)\sin(x) = 0$.

Exercice 8 Décrivez les comportements limites près des asymptotes verticales de

$$x \mapsto \frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-1)(x+2)^2}$$

Exercice 9 Évaluez les limites suivantes, en utilisant des manipulations algébriques.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$,

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x}$, (j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1}$,

(k) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3}$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2}$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|2x-5|}{3x+1}$,

(o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x+\cos^2(x)}{2x^2-\sin^2(2x)}$, (p) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)-\sin(x)+1}{2\exp(x)+\cos(x)-3}$.

Exercice 10 Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)}{\exp(x)-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\ln^2(x)-1}{\ln(x)-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}$.

Exercice 11 Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{\tan(x)})$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a\,x)-1}{\cos(b\,x)-1}$, $(b \neq 0)$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(a\,x)}{x^2}\right)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{x-\tan(x)}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Exercice 12 Trouvez des exemples de fonctions paires f, g satisfaisant les conditions suivantes lorsque $x \to +\infty$:

1. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to 0$;
2. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to +\infty$;
3. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to -\infty$;
4. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to 3$.

Domaine de continuité

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ En précisant les règles que vous utilisez, donnez le domaine de continuité des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$(a) \quad | x^2 + 3x | \qquad (b) \quad \frac{x}{\ln x} + \arcsin(x^2) \qquad (c) \quad x e^{\frac{1}{x}}$$

$$(d) \quad \sqrt{e^x - e^{2x}} \qquad (e) \quad \arctan(\sqrt{1 - x^2} - x)$$

Croissances comparées

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ Donner la limite en $+\infty$ des fonctions données par les formules

$$(a) \quad \frac{x+2}{x^2 \ln x} \qquad (b) \quad \frac{e^{\sqrt{x}}}{x+2} \qquad (c) \quad \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Donner la limite en 0_+ des fonctions données par les formules

$$(a) \quad 2x \ln(x + \sqrt{x}) \qquad (b) \quad \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Donner la limite en $+\infty$ des fonctions données par les formules

$$(a) \quad \left(\frac{e^x + 1}{x + 2}\right)^{\frac{1}{x+1}} \qquad (b) \quad \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$$

Asymptotes

$\boxed{\textbf{Exercice 17}}$ Déterminer les asymptotes en $+\infty$ (et $-\infty$ le cas échéant) aux graphes des fonctions données par les formules

$$(a) \quad | x^2 + 3x | \qquad (b) \quad \frac{x}{\ln x} \qquad (c) \quad x e^{\frac{1}{x}}$$

$$(d) \quad \sqrt{e^x - e^{2x}} \qquad (e) \quad \arctan(\sqrt{1 - x^2} - x) \qquad (f) \quad \ln(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh} x + 1)$$